# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 22 gennaio 1911.*

F. D' Ovidio Vicepresidente.


## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Alcune formule inedite di J. Weingarten con applicazioni.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Nella lunga corrispondenza epistolare che ebbi, a partire dal 1884, col compianto professore Weingarten, egli mi comunicò varie formole interessanti per la geometria infinitesimale delle superficie, delle quali alcune soltanto furono poi rese note dall'autore stesso nelle sue pubblicazioni.

Penso di far cosa grata ai cultori della geometria infinitesimale pubblicando qui, col consenso della famiglia dell'insigne geometra, alcune sue formole inedite (1) colle quali si esprimono, sotto forma invariantiva, le variazioni subìte dai coefficienti delle due forme fondamentali di una superficie quando ciascun punto di questa subisca uno spostamento infinitesimo secondo la normale, e variabile da punto a punto (2).

Facendo seguire le dimostrazioni di queste formole, ho stimato opportuno di darne anche l'estensione alle ipersuperficie dello spazio euclideo, e più in generale allo spazio di curvatura costante, con un numero qualunque di dimensioni. In pari tempo, togliendo loro il carattere infinitesimale, le

(1) La lettera in cui mi vennero dall'autore comunicate porta la data del 27 dicembre 1884.

(2) Formole di questo genere, per spostamenti arbitrarii dei punti di una superficie, furono date da Ribaucour, *Sur la théorie générale des surfaces courbes* (Journal de mathématiques 4ème série, t. VII, 1891, n. 109 a 116). V. anche E. Daniele, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili* (Memorie dell'Accademia di Torino, ser. 2ª, t. I, 1900).

ho considerate come esprimenti, per una serie qualunque $\infty^1$ di ipersuperficie, le derivate secondo la normale dei coefficienti delle sue due forme quadratiche fondamentali. Esse appaiono allora sotto nuova luce esprimendo, congiunte alle equazioni di Gauss e di Codazzi, le condizioni necessarie e sufficienti perchè un $ds^2$ della forma

$$ds^2 = n^2 dx_0^2 + \sum_{i,k}^{1\ldots m} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

appartenga allo spazio $S_{m+1}$ ad $m+1$ dimensioni e di curvatura costante $c$.

Per mostrare subito l'utilità di queste formole di Weingarten, mi volgo prima a proprietà ben note, deducendone nuovamente il teorema di Dupin-Darboux, nonchè l'equazione caratteristica del Cayley per le famiglie di Lamé.

Indi tratto e risolvo un nuovo problema che riguarda le reti di linee rigide articolate, supponendo una tale rete deformabile in guisa che ciascun suo punto si muova normalmente alla superficie sostegno; e dimostro che in tal caso la rete è necessariamente costituita dalle generatrici dei due sistemi di una quadrica variabile in un sistema omofocale.

E lasciando il soggetto delle formole di Weingarten, tratto ancora un caso di reti deformabili che si può riguardare in certo modo come l'opposto di quello ora indicato: il caso in cui la rete sia piana e la deformazione avvenga nel piano stesso della rete. Dimostro che le uniche reti piane deformabili di curve rigide sono le *reti di Tchebychef*, cioè quelle generate da due curve arbitrarie segantisi che si muovono di moto traslatorio l'una lungo l'altra.

Da ultimo risolvo il problema delle reti deformabili di curve rigide nel caso che gli spostamenti dei punti avvengano parallelamente ad un piano fisso e dimostro che queste reti sono tutte e sole quelle che si projettano ortogonalmente sul piano fisso in una rete di Tchebychef.

### 1. *Le formole infinitesimali di Weingarten.*

Sia S una superficie riferita ad un sistema curvilineo $(u, v)$ e definita intrinsecamente dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\text{(1)} \qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$\text{(2)} \qquad D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2.$$

In ogni punto $(u, v)$ di S stacchiamo sulla normale un segmento infinitesimo $= \varepsilon n$, dove $\varepsilon$ è una costante infinitesima, le cui potenze superiori alla prima si trascurano, ed $n = n(u, v)$ una funzione arbitraria di $u, v$, finita e continua colle derivate fino almeno al 3° ordine. Il luogo dei ter-

mini di questi segmenti sarà una superficie S′ infinitamente vicina ad S. Le formole di Weingarten esprimono le variazioni

$$\delta E\,,\ \delta F\,,\ \delta G\quad ;\quad \delta D\,,\ \delta D'\,,\ \delta D''$$

dei coefficienti delle due forme fondamentali nel passaggio da S ad S′; esse sono le seguenti:

$$\text{(I)}\qquad \delta E = -2\varepsilon n\,.\,D\quad ,\quad \delta F = -2\varepsilon n\,.\,D'\quad ,\quad \delta G = -2\varepsilon n\,.\,D''$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \delta D = \varepsilon\left[\dfrac{\partial^2 n}{\partial u^2} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial n}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial n}{\partial v} + (KE + HD)\,n\right] \\ \delta D' = \varepsilon\left[\dfrac{\partial^2 n}{\partial u\,\partial v} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial n}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial n}{\partial v} + (KF + HD')\,n\right] \\ \delta D'' = \varepsilon\left[\dfrac{\partial^2 n}{\partial v^2} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial n}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\dfrac{\partial n}{\partial v} + (KG + HD'')\,n\right]. \end{cases}$$

Qui i simboli di Christoffel $\left\{\begin{matrix}i\,k\\l\end{matrix}\right\}$ si intendono costruiti per la forma fondamentale (1), mentre H e K hanno il solito significato di curvatura media e curvatura totale di S:

$$\text{(3)}\qquad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}$$

$$\text{(4)}\qquad K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}\,.$$

Si osserverà che, adoperando le notazioni delle derivate seconde covarianti, le formole (II) si scrivono

$$\text{(II*)}\qquad \begin{cases} \delta D = \varepsilon\,[n_{11} + (KE + HD)\,n] \\ \delta D' = \varepsilon\,[n_{12} + (KF + HD')\,n] \\ \delta D'' = \varepsilon\,[n_{22} + (KG + HD'')\,n]. \end{cases}$$

Per dimostrare queste formole di Weingarten, si cominci dall'osservare che le variazioni $\delta x\,,\ \delta y\,,\ \delta z$ delle coordinate cartesiane ortogonali di un punto $(u\,,\,v)$ di S sono date da

$$\text{(5)}\qquad \delta x = \varepsilon n X\quad ,\quad \delta y = \varepsilon n Y\quad ,\quad \delta z = \varepsilon n Z\,,$$

denotando al solito X, Y, Z i coseni di direzione della normale. Ed ora, variando le formole

$$E = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\quad ,\quad F = S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\quad ,\quad G = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

coll'osservare che si ha

$$(\alpha) \qquad SX^2 = 1 \ , \ SX\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \ , \ SX\frac{\partial x}{\partial v} = 0 ,$$

$$(\beta) \qquad D = -S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} \ , \ D' = -S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} ,$$

$$D'' = -S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} ,$$

risultano subito le (I).

Variando le $(\alpha)$, otteniamo poi

$$(6) \qquad \delta X = -\varepsilon\nabla(x, n) \ , \ \delta Y = -\varepsilon\nabla(y, n) \ , \ \delta Z = -\varepsilon\nabla(z, n) ,$$

ed in fine, variando le $(\beta)$ coll'osservare le identità:

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\nabla(x, n)}{\partial u} = n_{11} \ , \ S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\nabla(x, n)}{\partial v} = S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\nabla(x, n)}{\partial u} = n_{12} ,$$

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\nabla(x, n)}{\partial v} = n_{22} ,$$

ne risultano le formole (II) o (II*).

2. *Le formole di Weingarten in termini finiti per le ipersuperficie.*

Nello spazio $S_{m+1}$ ad $m+1$ dimensioni a curvatura nulla (euclideo), o più in generale a curvatura Riemanniana costante $c$, si consideri una qualunque serie $\infty^1$ di ipersuperficie $V_m$, e le curve C loro trajettorie ortogonali. Riferiamo lo spazio ad un sistema di coordinate curvilinee

$$x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_m ,$$

per le quali le ipersuperficie $x_0 = \text{cost}$ siano le $V_m$ date, e le curve $(x_0)$, lungo le quali varia il solo parametro $x_0$, siano le curve C trajettorie ortogonali delle $V_m$. L'elemento lineare $ds$ dello spazio prenderà la forma

$$(7) \qquad ds^2 = n^2 dx_0^2 + \sum_{i,k}^{1\ldots m} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

dove i coefficienti $n$, $a_{ik}$ sono funzioni di tutte le variabili $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$. Indichiamo inoltre con

$$\sum_{i,k}^{1\ldots m} \Omega_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

la seconda forma quadratica fondamentale delle ipersuperficie $V_m$ (v. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, § 164).

Colle usuali notazioni per la forma quadratica differenziale (7), abbiamo

$$a_{00} = n^2 \quad , \quad a_{01} = a_{02} = \cdots = a_{0m} = 0$$

$$A_{00} = \frac{1}{n^2} \quad , \quad A_{01} = A_{02} = \cdots = A_{0m} = 0 ,$$

mentre le altre $A_{ik}$, per $i \neq 0$ , $k \neq 0$, hanno i medesimi valori come per la forma ad $m$ variabili

$$(7^*) \qquad \sum_{i,k}^{1 \ldots m} a_{ik}\, dx_i\, dx_k ,$$

che dà il $ds^2$ della ipersuperficie $V_m$. Ne segue che, se $i , k , l , \ldots$ indicano qui, come in seguito, indici presi nella serie $1 , 2 , \ldots , m$ (con esclusione dell'indice zero), i simboli di Christoffel di prima e di seconda specie

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$$

hanno i medesimi valori per la forma differenziale (7) come per la (7*).

Ora si osservi che le costanti di direzione della normale alla ipersuperficie $V_m$ hanno i valori (*Lezioni* ecc., vol. I, pag. 332)

$$X_0 = \frac{1}{n} \quad , \quad X_1 = X_2 = \cdots = X_m = 0 ,$$

onde abbiamo per le $\Omega_{ik}$

$$\Omega_{ik} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} i\,k \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

cioè

$$(A) \qquad \Omega_{ik} = -\frac{1}{2n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_0} .$$

Con queste formole calcoliamo subito quei valori dei simboli $\begin{bmatrix} \alpha\,\beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ di Christoffel nei quali figura almeno un indice nullo e troviamo

$$(8) \qquad \begin{bmatrix} i\,k \\ 0 \end{bmatrix} = n\Omega_{ik} \quad , \quad \begin{bmatrix} i\,0 \\ k \end{bmatrix} = -\, n\Omega_{ik}$$

$$(8^*) \qquad \begin{bmatrix} i\,0 \\ 0 \end{bmatrix} = n \frac{\partial n}{\partial x_i} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0\,0 \\ i \end{bmatrix} = -\, n \frac{\partial n}{\partial x_i} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{bmatrix} = n \frac{\partial n}{\partial x_0} .$$

Dopo ciò calcoliamo le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè l'elemento lineare (7) appartenga allo spazio $S_{m+1}$ di curvatura Riemanniana costante $c$, espresse dalle formole (*Lezioni*, vol. I, pag. 344)

$$(9) \qquad (\alpha\beta , \gamma\delta) = c(a_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}\, a_{\beta\gamma})$$

$$\alpha , \beta , \gamma , \delta = 0 , 1 , 2 , \ldots , m .$$

Distinguiamo tre specie di questi simboli di Riemann a quattro indici $(\alpha\beta, \gamma\delta)$, secondo che

*a*) nessuno degli indici è zero;

*b*) un solo indice è nullo;

*c*) due indici sono nulli.

Il calcolo stesso eseguito al § 165, vol. I delle *Lezioni* dimostra che nel caso *a*) le equazioni (9) dànno le equazioni di Gauss (H*), vol. I, pag. 362, e nel caso *b*) invece le equazioni di Codazzi (J*) (ibid.). Resta solo che calcoliamo le (9) nel caso *c*), cioè le condizioni della forma

$$(10) \qquad (0k, i0) = -ca_{ik}\, n^2 .$$

Secondo la definizione del simbolo di Riemann (*Lezioni*, vol. I, pag 73) (1), abbiamo

$$(0k, i0) = \frac{\partial}{\partial x_0}\begin{bmatrix} 0i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} 00 \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{n^2}\left\{\begin{bmatrix} 00 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0i \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0k \\ 0 \end{bmatrix}\right\} + \\ + \sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} 00 \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0i \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0k \\ \mu \end{bmatrix}\right\},$$

ed osservando le (8), (8*)

$$(0k, i0) = -\frac{\partial}{\partial x_0}(n\Omega_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(n\frac{\partial n}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{n^2}\left\{n^2\Omega_{ik}\frac{\partial n}{\partial x_0} - n^2\frac{\partial n}{\partial x_i}\frac{\partial n}{\partial x_k}\right\} - \\ - n\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} A_{\lambda\mu}\begin{bmatrix} ik \\ \mu \end{bmatrix}\frac{\partial n}{\partial x_\lambda} - n^2\sum_{i,k}^{1\ldots m} A_{\lambda\mu}\,\Omega_{i\lambda}\,\Omega_{k\mu}.$$

Se si fanno le riduzioni e si introducono i simboli di Christoffel di 2ª specie, si ha

$$(0k, i0) = n\left[\frac{\partial^2 n}{\partial x_i\,\partial x_k} - \sum_{\lambda}^{1\ldots m}\begin{Bmatrix} ik \\ \lambda \end{Bmatrix}\frac{\partial n}{\partial x_\lambda} - n\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} A_{\lambda\mu}\,\Omega_{i\lambda}\,\Omega_{k\mu} - \frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial x_0}\right].$$

Dopo ciò le equazioni (10), colle notazioni delle derivate seconde covarianti, si scrivono

$$(B) \qquad \frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial x_0} = n_{ik} + \left\{\sum_{\lambda,\mu}^{1\ldots m} A_{\lambda\mu}\,\Omega_{i\lambda}\,\Omega_{k\mu} + ca_{ik}\right\} n .$$

Le formole (A) e (B) dànno le cercate generalizzazioni delle formole di Weingarten. Si osserva di più che esse hanno ora perduto il carattere

(1) $(\alpha\beta, \gamma\delta) = \frac{\partial}{\partial x_\delta}\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ \beta \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\begin{bmatrix} \alpha\delta \\ \beta \end{bmatrix} + \sum_{\lambda,\mu}^{0\ldots m} A_{\lambda\mu}\left\{\begin{bmatrix} \alpha\delta \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta\gamma \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta\delta \\ \mu \end{bmatrix}\right\}.$

infinitesimale ed esprimono, associate alle equazioni di Codazzi e di Gauss, le condizioni necessarie e sufficienti perchè il $ds^2$ dato dalla (8) appartenga allo spazio ad $m+1$ dimensioni di curvatura Riemanniana costante $c$.

Osserviamo che se si pone

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

e si deriva logaritmicamente rapporto ad $x_0$, si deduce per le (A)

$$\frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial x_0} = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{1\ldots m} A_{ik} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_0} = -n \sum_{i,k}^{1\ldots m} A_{ik} \Omega_{ik} .$$

Ma indicando con $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots \frac{1}{R_m}$ le curvature principali della ipersuperficie $V_m$, prese con segno conveniente, si ha (*Lezioni*, vol. I, § 168)

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_m} = -\sum_{i,k}^{1\ldots m} A_{ik} \Omega_{ik}),$$

indi la formola

$$\frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial x_0} = n \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_m} \right). \tag{11}$$

Ora l'elemento d'ipervolume della $V_m$ è dato da

$$\sqrt{A} \, . \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m$$

e dalla formola (11) segue: Condizione necessaria e sufficiente perchè le trajettorie ortogonali delle ipersuperficie $V_m$ segnino sopra di queste una corrispondenza che conservi gli ipervolumi è che le ipersuperficie $V_m$ abbiano nulla la curvatura media (ipersuperficie minime). Il caso $m = 2$ delle ordinarie superficie minime è ben noto [1].

### 3. *Applicazioni alle famiglie di Lamé.*

Ritorniamo al caso dell'ordinario spazio $S_3$ euclideo, facendo $m = 2$, $c = 0$, e scrivendo $u, v, w$ al posto di $x_1, x_2, x_0$, poniamo nelle consuete notazioni

$$a_{11} = E \quad , \quad a_{12} = F \quad , \quad a_{22} = G \quad ,$$
$$\Omega_{11} = D \quad , \quad \Omega_{12} = D' \quad , \quad \Omega_{22} = D'' .$$

[1] Cfr. Schwarz. *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung*; v. anche *Lezioni*, vol. II, pag. 578.

L'elemento lineare dello spazio prenderà la forma

$$(12) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 + n^2\,dw^2,$$

e le formole (A), (B) diventeranno

$$(III) \qquad \frac{\partial E}{\partial w} = -2nD \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial w} = -2nD' \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial w} = -2nD'',$$

$$(IV) \qquad \frac{\partial D}{\partial w} = n_{11} + (KE + HD)\,n \quad , \quad \frac{\partial D'}{\partial w} = n_{12} + (KF + HD')\,n,$$

$$\frac{\partial D''}{\partial w} = n_{22} + (KG + HD'')\,n,$$

dove H e K hanno il solito significato di curvatura media e totale, secondo le formole (3), (4). Le (III) e (IV) ci dànno le derivate dei coefficienti E, F, G ; D, D', D'' nel senso della normale, ed associate alla equazione di Gauss e alle due di Codazzi, dànno le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'elemento lineare (12) appartenga allo spazio ordinario.

Dalle (III) e (IV) deduciamo ancora le tre seguenti

$$(13) \qquad \frac{\partial}{\partial w}\log(EG - F^2) = 2nH$$

$$(14) \qquad \frac{\partial H}{\partial w} = (2K - H^2)\,n - \Delta_2 n$$

$$(15) \qquad \frac{\partial K}{\partial w} = \frac{Dn_{22} + D''n_{11} - 2D'n_{12}}{EG - F^2} - HKn,$$

l'ultima delle quali si può anche scrivere sotto la forma

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial n}{\partial u} - D'\frac{\partial n}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial n}{\partial v} - D'\frac{\partial n}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\} - HK.n\ (^1).$$

Osserviamo subito alcune conseguenze delle formole (III), (IV) che confermano risultati ben noti.

1°) Suppongasi che il sistema $(u, v, w)$ sia triplo ortogonale. Essendo $F = 0$, la media delle (III), dimostra che anche $D'$ è costantemente nullo, cioè sulle $w = \text{cost}$ le linee $u, v$ sono quelle di curvatura; dunque: in ogni sistema triplo ortogonale le superficie dei tre sistemi si intersecano lungo le loro linee di curvatura (teorema di Dupin).

2°) Suppongasi che sulle superficie $w = \text{cost}$ le linee $v = \text{cost}$ siano linee di curvatura, si supponga cioè che i due sistemi di superficie $v = \text{cost}$,

(1) È interessante qui l'osservazione, già fatta dal Weingarten, che nel caso di K costante l'equazione che segue per $n$ dalla (15) coincide con quella per la funzione caratteristica $\varphi$ delle deformazioni infinitesime (*Lezioni*, vol. II, pag. 7).

$w = \text{cost}$ si taglino ortogonalmente lungo linee di curvatura. Poichè sulle $w = \text{cost}$ l'equazione differenziale delle linee di curvatura è

$$(16) \quad (ED' - FD)\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv + (FD'' - GD')\,dv' = 0,$$

la nostra ipotesi equivale a supporre

$$ED' - FD = 0,$$

onde per le due prime (III) si ha

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial w} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial w},$$

indi $\frac{F}{E}$ indipendente da $w$. L'equazione differenziale delle linee di curvatura del secondo sistema

$$E\,du + F\,dv = 0$$

essendo dunque indipendente da $w$, anche queste linee si corrispondono sulle $w = \text{cost}$ nella corrispondenza segnata dalle curve C loro trajettorie ortogonali. Ne risulta il teorema inverso di Dupin (Darboux):

Se due sistemi di superficie si tagliano ortogonalmente lungo linee di curvatura, esiste un terzo sistema ortogonale ad ambedue.

3°) Cerchiamo ora di esprimere la condizione perchè le superficie $w = \text{cost}$ costituiscano una famiglia di Lamé (appartengano ad un sistema triplo ortogonale). Occorre e basta per ciò che nella equazione differenziale (16) delle linee di curvatura i rapporti dei tre coefficienti

$$ED' - FD \quad , \quad ED'' - GD \quad , \quad FD'' - GD'$$

siano indipendenti da $w$, ossia che questi tre binomî siano proporzionali alle loro tre derivate rapporto a $w$. Ma dalle formole (III), (IV) di Weingarten abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial w}(ED' - FD) = En_{12} - Fn_{11} + Hn(ED' - FD)$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(ED'' - GD) = En_{22} - Gn_{11} + Hn(ED'' - GD)$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(FD'' - GD') = Fn_{22} - Gn_{12} + Hn(FD'' - GD'),$$

onde il sussistere di quelle proporzioni equivale all'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix}.$$

Ne concludiamo: Affinchè una serie $\infty^1$ di superficie formi una famiglia di Lamé è necessario e sufficiente che la distanza normale infinitesima $\varepsilon n$ fra due superficie della serie soddisfi all'equazione del Cayley (*Lezioni*, vol. II, pag. 480)

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0 .$$

### 4. *Reti deformabili di curve rigide.*

Sopra una qualunque superficie S immaginiamo distesa una *rete* di curve, cioè un doppio sistema di curve $(u, v)$ tale che da ogni punto di S, o di una sua regione convenientemente limitata, esca una curva di ciascuno dei due sistemi. Supponiamo di più che le curve $(u\ v)$ siano *individualmente* rigide ed articolate ai loro punti d'incrociamento. Può darsi, ciò non ostante, che la rete sia deformabile e possiamo proporci il problema di *trovare tutte le reti deformabili di curve rigide*. Qui risolveremo dapprima, come applicazione delle formole di Weingarten, il problema nel caso particolare che la deformazione continua della rete avvenga per modo che ciascun punto del reticolo si muova normalmente alla superficie sostegno. Si vedrà che allora la rete consta necessariamente del doppio sistema di generatrici di una quadrica variabile in un sistema omofocale.

A sistema triplo coordinato $(u, v, w)$ prendiamo le $\infty^1$ configurazioni $w = \text{cost}$ della superficie S sostegno, e prendiamo poi a superficie $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ quelle descritte dalle singole linee della rete. Le trajettorie $(w)$ descritte dai punti di S essendo per ipotesi normali alla S, l'elemento lineare avrà la forma (12). Ma le curve $(u), (v)$ della rete rimangono per ipotesi rigide e in particolare inestendibili, quindi si ha

$$\frac{\partial E}{\partial w} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial w} = 0$$

e per le (III) di Weingarten

$$D = 0 \quad , \quad D'' = 0 ;$$

dunque intanto: *sopra ogni superficie* S *o* $w = \text{cost}$ *la rete* $(u, v)$ *sarà quella delle asintotiche* (1).

Si osservi che questo primo risultato vale più in generale per le reti di curve flessibili ed inestendibili, supposte deformabili in guisa che ogni

(1) Lo stesso si deduce dalla semplice considerazione geometrica seguente. Sulla superficie descritta da una linea $(u)$ o $(v)$ della rete le trajettorie ortogonali $(w)$ di queste linee staccano archi eguali, e perciò le linee stesse sono geodetiche della superficie generata, indi asintotiche delle $w = \text{cost}$, che tagliano le prime superficie ortogonalmente.

punto si muova normalmente alla superficie sostegno. La ricerca generale di queste ultime reti equivale dunque al problema di: *trovare la serie* $\infty^1$ *di superficie sulle quali la corrispondenza segnata dalle curve trajettorie ortogonali conserva le linee asintotiche.*

Si sa che una tale serie $\infty^1$ di superficie è necessariamente una famiglia di Lamé (*Lezioni*, vol. II, pag. 508); si sa ancora che tutte le famiglie di Lamé costituite da superficie pseudosferiche, di raggio costante o variabile, dànno altrettante soluzioni del problema. Un'altra soluzione isolata si ha nei sistemi omofocali di quadriche rigate; ma il problema generale sopra enunciato rimane ancora da risolversi.

### 5. *Reti delle generatrici di quadriche omofocali.*

Ritorniamo al nostro speciale problema, nel quale le linee $(u, v)$ della rete sono supposte non soltanto inestendibili ma assolutamente rigide, e dimostriamo che esse sono necessariamente linee rette.

Si è già visto che queste linee $(u, v)$ sono le asintotiche della superficie S sostegno della rete, onde indicando con $\frac{1}{T}$ la loro torsione sarà, pel teorema di Enneper,

$$K = -\frac{1}{T^2} \ (^1).$$

Per dimostrare l'asserzione superiore faremo vedere che dall'ipotesi contraria nascerebbe un assurdo. Supponiamo dunque che uno almeno dei due sistemi $(u, v)$ non sia rettilineo, per es. le $(u)$ siano effettive curve. Poichè ciascuna di esse si muove rigidamente, sarà $\frac{1}{T}$ indipendente da $w$, e perciò anche

$$\frac{\partial K}{\partial w} = 0. \tag{17}$$

Essendo $D = 0$, $D'' = 0$, le formole (IV) di Weingarten dànno

$$n_{11} + KEn = 0 \quad , \quad n_{12} + KGn = 0.$$

Inoltre la (17), osservando la (15) e la (3), ci dà anche

$$n_{12} + KFn = 0;$$

dunque la funzione $n$ deve soddisfare il sistema simultaneo

$$n_{11} + KEn = 0 \quad , \quad n_{12} + KFn = 0 \quad , \quad n_{22} + KGn = 0. \tag{18}$$

(1) A questo punto noi intendiamo escluso il caso che le superficie S siano piane. In tal caso infatti le trajettorie ortogonali dei piani segnerebbero sopra di essi figure eguali *e la rete non subirebbe deformazione.*

È facile dedurne che K deve essere assolutamente costante. Per le proprietà delle derivate seconde covarianti si hanno invero, per qualunque $n$, le identità

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial n_{11}}{\partial v} - \dfrac{\partial n_{12}}{\partial u} = KF\dfrac{\partial n}{\partial u} - KE\dfrac{\partial n}{\partial v} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} n_{11} + \\ \qquad + \left[\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right] n_{12} - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} n_{22} \\ \dfrac{\partial n_{22}}{\partial u} - \dfrac{\partial n_{12}}{\partial v} = KF\dfrac{\partial n}{\partial v} - KG\dfrac{\partial n}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} n_{11} + \\ \qquad + \left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right] n_{12} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} n_{22}, \end{cases}$$

ed avendo riguardo alle altre identità

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{\partial F}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} E + \left[\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right] F - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} G \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v} = -\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} E + \left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right] F + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} G, \end{cases}$$

deduciamo subito dalle condizioni d'integrabilità dalle (18)

$$\begin{cases} E\dfrac{\partial K}{\partial v} - F\dfrac{\partial K}{\partial u} = 0 \\ F\dfrac{\partial K}{\partial v} - G\dfrac{\partial K}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0.$$

Ma, essendo zero per la (17) anche $\dfrac{\partial K}{\partial w}$, segue appunto che K è assolutamente costante, e la famiglia di Lamé $u = \text{cost}$ è adunque composta di superficie pseudosferiche del medesimo raggio (sistema di Weingarten). Senza alterare la generalità, possiamo fare

$$K = -1$$
$$E = G = 1 \quad , \quad F = \cos\omega$$
$$D = D'' = 0 \quad , \quad D'' = \operatorname{sen}\omega,$$

onde risulta dalla media delle (III)

$$n = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial w}.$$

Dopo ciò le (18) diventano

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u^2\,\partial w} = \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial u}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} + \dfrac{\partial\omega}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \cos\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial v^2\,\partial w} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} + \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} + \dfrac{\partial\omega}{\partial w}\,; \end{cases}$$

queste, associate alla equazione di Gauss

$$(20^*)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = \operatorname{sen}\omega\,,$$

dànno le note equazioni fondamentali pei sistemi di Weingarten, espresse qui in coordinate asintotiche $(u\,,\,v)$.

Ma nel nostro speciale problema, rimanendo per ipotesi rigide le linee asintotiche $(u\,,\,v)$ nel passaggio dell'una all'altra superficie pseudosferica, ci rimane ancora da tener conto che, oltre la torsione $\frac{1}{T} = \pm 1$, anche le loro prime curvature $\frac{1}{\varrho_u}\,,\,\frac{1}{\varrho_v}$ debbono essere indipendenti da $w$. Coincidendo queste curvature assolute colle geodetiche, abbiamo

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{\partial\omega}{\partial v}\quad,\quad \frac{1}{\varrho_v} = -\frac{\partial\omega}{\partial u}\,,$$

indi

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial w} = 0\quad,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial v\,\partial w} = 0\,.$$

Una qualunque delle (20) darebbe quindi $\frac{\partial\omega}{\partial w} = 0$, o $n = 0$, onde il sistema delle superficie $w = \text{cost}$ si ridurrebbe ad una sola superficie, ciò che contraddice le nostre ipotesi. Da tutto ciò si raccoglie che: la rete deformabile di linee rigide è necessariamente costituita da due sistemi di rette, onde la superficie sostegno, non potendo esser piana, per quanto abbiamo già osservato sopra, sarà una quadrica.

Ciò posto, riferiamo due quadriche qualunque della serie alle loro generatrici (coordinate asintotiche) ed osserviamo che esse sono poste in tale corrispondenza di punto a punto che le loro generatrici si corrispondono per tratti eguali.

Risulta subito da considerazioni elementari (1) che le due quadriche sono necessariamente congruenti con due quadriche omofocali, e per ciò nella corrispondente forma (12) dell'elemento lineare dello spazio

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 + n^2\,dw^2$$

i valori dei coefficienti E, F, G, espressi per $u, v, w$, coincidono con quelli che convengono ad un sistema di quadriche omofocali. Ma allora la media delle (III) dimostra che anche il valore di

$$n = -\frac{1}{2D'}\frac{\partial F}{\partial w}$$

è il medesimo. Possiamo dunque enunciare il risultato finale:

*Le uniche reti di linee rigide, deformabili in guisa che i singoli punti delle reti si muovano normalmente alla superficie sostegno, sono date dal doppio sistema di generatrici di una quadrica variabile in un sistema omofocale.*

### 6. *Reti piane deformabili di curve rigide.*

Lasciando da parte le applicazioni delle formole di Weingarten, sulle quali mi propongo di ritornare in seguito, trattiamo ora e risolviamo un altro problema particolare di reti deformabili di curve rigide, quello di reti piane che si deformano nel loro piano. Sia $(u, v)$ una tale rete piana, le cui linee $u, v$ prendiamo a linee coordinate, e sia

$$(21) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2\cos\omega\sqrt{EG}\,du\,dv + G\,dw^2$$

(1) Si tratti per es. di due iperboloidi rigati

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} - \frac{Z^2}{C^2} = 1,$$

che riferiamo alle loro generatrici $(u, v)$, $(U, V)$ colle formole

$$x = a\frac{1+uv}{u+v} \quad , \quad y = b\frac{u-v}{u+v} \quad , \quad z = c\frac{1-uv}{u+v}$$

$$X = A\frac{1+UV}{U+V} \quad , \quad Y = B\frac{U-V}{U+V} \quad , \quad Z = C\frac{1-UV}{U+V}.$$

Dovendosi corrispondere le loro generatrici *projettivamente*, sarà per es. U una funzione lineare di $u$, e V una funzione lineare di $v$. Ma la condizione che i tratti corrispondenti di generatrici siano eguali porta subito che si ha semplicemente

$$U = u \quad , \quad V = v$$

e inoltre

$$A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = -(C^2 - c^2),$$

onde le due quadriche sono rispettivamente congruenti con due iperboloidi omofocali.

l'elemento lineare del piano. Supponiamo che la rete sia deformabile *con continuità*, rimanendo rigide le linee $u, v$, articolate ai loro punti d'incontro. Nella (21) i coefficienti E, G rimarranno fissi, in funzione di $u, v$, insieme alle curvature $\frac{1}{\varrho_u}, \frac{1}{\varrho_v}$ delle linee coordinate, mentre l'angolo $\omega$ varierà dipendendo, oltre che da $u, v$, da una costante *arbitraria*. Si noti in primo luogo che, essendo nulla la curvatura della forma differenziale (21), avremo, per la formola di Liouville (*Lezioni*, vol. I, pag. 185):

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v}\right) = 0. \tag{22}$$

Prendendo ora le espressioni delle curvature $\frac{1}{\varrho_u}, \frac{1}{\varrho_v}$ (ibid. pag. 184)

$$\begin{cases} \frac{1}{\varrho_u} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega \sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v}(\cos\omega . \sqrt{E}) - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right\}, \\ \frac{1}{\varrho_v} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega \sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(\cos\omega \sqrt{E}) - \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right\}, \end{cases}$$

ne deduciamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cot\omega - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cot\omega - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}. \end{cases} \tag{23}$$

Si derivi per es. la prima di queste rapporto a $v$, ed avendo riguardo alla seconda (23) ed alla (22), si avrà

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}\right) + \frac{\partial^2 \log \sqrt{G}}{\partial u\, \partial v} \cot\omega - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) \frac{1}{\operatorname{sen}\omega} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega} \left\{ \frac{-\sqrt{G}}{\varrho_u} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cot\omega - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega} \left\{ -\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cot\omega - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \right\} = 0.$$

Moltiplicando questa per $\operatorname{sen}^3\omega$ ed ordinando, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}\right)\operatorname{sen}^3\omega + \frac{\partial^2 \log\sqrt{G}}{\partial u\,\partial v}\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2\cos^2\omega - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\operatorname{sen}^2\omega -$$
$$-\frac{1}{\varrho_u}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{sen}\omega\cos\omega - \frac{2}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\omega +$$
$$+\frac{1}{\varrho_u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{sen}\omega + \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Ora questa deve essere un'identità in $\omega$, altrimenti ne trarremmo $\omega$ in funzione di $u, v$ *senza costante arbitraria*; debbono quindi sussistere le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}\right) = 0\ ,\ \frac{\partial^2\log\sqrt{G}}{\partial u\,\partial v} = 0\ ,\ \frac{1}{\varrho_u}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0\ ,\ \frac{1}{\varrho_u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2,$$

le ultime delle quali bastano già a concludere che si ha necessariamente

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0\ \ ,\ \ \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0.$$

Cangiando i parametri $u, v$, possiamo dunque fare

$$E = 1\ \ ,\ \ G = 1,$$

e conseguentemente

$$\omega = U + V$$

$$(24)\qquad \frac{1}{\varrho_u} = -\frac{\partial\omega}{\partial v} = -V'\ \ ,\ \ \frac{1}{\varrho_u} = -\frac{\partial\omega}{\partial u} = U',$$

dove U è funzione (arbitaria) della sola $u$, V di $v$. La rete $(u, v)$ corrisponde alla forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(U + V)\,du\,dv + dv^2$$

dell'elemento lineare del piano, ed è dunque una *rete di Tchebychef*, che si ottiene in termini finiti dalle formole

$$(25)\qquad \begin{cases} x = \int \cos U\,du + \int \cos V\,dv \\ y = \int \operatorname{sen} U\,du + \int \operatorname{sen} V\,dv; \end{cases}$$

essa è generata da due curve arbitrarie nel piano, che si muovono di moto traslatorio l'una lungo l'altra. Siccome poi, aumentando $\omega$ (U o V) di una costante, le curve della rete, a causa delle (24) o (25), restano rigide, vediamo che le reti piane di Tchebychef sono effettivamente deformabili nel modo voluto. Abbiamo così stabilito il teorema: *Le reti piane deformabili di curve rigide sono tutte e sole le reti di Tchebychef*. In particolare, fra i reticolati piani di rette solo quelli parallelogrammici sono deformabili nel piano.

Qui è ancora opportuno osservare che se la curvatura dell'elemento lineare (21), anzichè nulla, si suppone solo costante $= k$ [1], si vede subito che la rete $(u, v)$ non può essere deformabile quando $k \neq 0$. Nel piano della geometria ellittica od iperbolica non esistono dunque reti deformabili di curve rigide; nel caso parabolico (euclideo) è all'esistenza del gruppo delle traslazioni che si collega l'esistenza delle reti deformabili di Tchebychef. Coll'osservazione precedente è anche risoluta negativamente la questione se possano esistere sulla sfera reti di curve rigide deformabili, restando sulla sfera.

### 7. *Nuovo caso di reti deformabili.*

Le formole

$$x = x(u, v, w) \ , \ y = y(u, v, w) \ , \ z = z(u, v, w) \tag{26}$$

definiscono nello spazio, per ogni valore dato al parametro $w$, una superficie, e su questa una rete $(u, v)$ di curve. Supponiamo che, al variare di $w$, le curve della rete si muovano, ciascuna per sè, rigidamente. Occorre e basta perciò che gli incrementi

$$\frac{\partial x}{\partial w} dw \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial w} dw \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

delle coordinate, ove si tenga $u$ costante, oppure $v$ costante, si esprimano per $x, y, z$ colle formole di un movimento rigido infinitesimo. Dovranno

[1] Ma vi ha di più. Se si suppone soltanto che sia $k$ funzione fissa di $u, v$ e medesimamente $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$, il calcolo stesso dimostra che deve essere $k = 0$, e si ricade nelle reti piane di Tchebychef. In particolare si deduce di qui: *Le reti deformabili di curve rigide, che rimangano sempre asintotiche della superficie sostegno, sono unicamente le reti piane di Tchebychef e il doppio sistema di generatrici di una quadrica.* Se si confronta questo risultato coll'osservazione della nota al n. 4, si ha una nuova e più semplice dimostrazione (indipendente dalle formole di Weingarten) del teorema finale del n. 5.

dunque sussistere sei equazioni del tipo seguente

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial w} = q(u,w).z - r(u,w).y + a(u,w) = \\ \qquad = q_1(v,w)\,z - r_1(v,w)\,y + a_1(v,w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} = r(u,w).x - p(u,w).z + b(u,w) = \\ \qquad = r_1(v,w).x - p_1(v,w).z + b_1(v,w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} = p(u,w).y - q(u,w)\,x + c(u,w) = \\ \qquad = p_1(v,w)\,y - q_1(v,w)\,x + c_1(v,w), \end{cases}$$

dove $p, q, r$ ; $a, b, c$ sono funzioni soltanto di $u, w$ e similmente $p_1, q_1, r_1$; $a_1, b_1, c_1$ di $(v, w)$. E viceversa se $x, y, z$ soddisfano ad equazioni di questo tipo, le (26) dànno una rete deformabile di curve rigide. La ricerca di tutte queste possibili reti equivale adunque analiticamente a cercare le soluzioni più generali di equazioni del tipo (27).

Qui limitiamoci a considerare un nuovo caso particolare, quello in cui gli spostamenti dei punti della rete avvengono parallelamente ad un piano fisso [1]. Prendendo questo per piano $xy$, sarà $z$ indipendente da $w$ e perciò avremo

$$p = q = c = 0 \quad ; \quad p_1 = q_1 = c_1 = 0.$$

Le (27) si riducono allora alle seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial w} = -ry + a = -r_1 y + a_1 \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} = \quad rx + b = \quad r_1 x + b_1, \end{cases}$$

le quali determinano evidentemente le reti piane deformabili di curve rigide. Dopo la determinazione di queste reti, effettuata nel n. precedente, possiamo dunque enunciare il teorema:

*Le reti deformabili di curve rigide, quando gli spostamenti dei punti avvengano parallelamente ad un piano fisso, sono tutte e sole quelle che si projettano ortogonalmente su questo piano in una rete di Tchebychef.*

Le formole che dànno una tale rete sono evidentemente

$$(28)\qquad x = \mathrm{U} + \mathrm{V} \quad , \quad y = \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1 \quad , \quad z = z(u,v),$$

[1] La considerazione di questo caso interessante di reti deformabili mi venne suggerita da un'osservazione fattami dal collega prof. Pizzetti, che cioè: se una rete di curve si projetta ortogonalmente sopra un piano in una rete, deformabile nel piano, di curve rigide, è essa pure deformabile.

dove $U$, $U_1$ sono funzioni arbitrarie di $u$, $V$, $V_1$ di $v$ e $z(u, v)$ una funzione arbitraria di $(u, v)$. Così per. es. su qualunque superficie due serie di piani paralleli intersecano una rete deformabile di curve rigide. Il ben noto esempio della rete delle sezioni circolari di una quadrica rientra in questo caso colla ulteriore particolarità che, deformando la rete, la superficie sostegno resta sempre una quadrica. Ed ancora: nell'esempio più generale dianzi addotto della rete intersecata sopra una superficie qualunque da due serie di piani paralleli, al deformarsi della rete, la superficie sostegno passa per una serie di configurazioni *affini*.

In fine osserviamo che nelle (28) prendiamo

$$z = U_2 + V_2,$$

cioè $z$ somma di due funzioni, una di $u$, l'altra di $v$, abbiamo la più generale superficie di traslazione sulla quale la rete delle curve generatrici è una rete deformabile di curve rigide. In questo caso gli spostamenti dei punti della rete possono avvenire parallelamente a qualunque piano.

## Matematica.— *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Nella mia prima Nota sulle equazioni integro-differenziali [1], in cui ho considerato la equazione integro-differenziale

$$\text{(I)} \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0,$$

ho accennato alla possibilità di estendere l'analisi ad equazioni integro-differenziali con limiti costanti. Mi permetto qui di trattare questo argomento, valendomi dei principii esposti in alcune Note nelle quali ho introdotto la considerazione delle funzioni permutabili e delle operazioni di composizione [2]. Già in una di queste Note avevo avuto occasione di studiare equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali conducono ad una classe di trascendenti uniformi che comprendono le funzioni ellittiche, ma in tali equazioni compariva una sola variabile di derivazione, e quindi esse dal lato differenziale potevano compararsi alle equazioni differenziali ordinarie. In questa Nota considererò invece delle equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali dal lato differenziale possono, al pari della (I), compararsi alle equazioni a derivate parziali.

[1] Rend. Acc. dei Lincei, 21 febbraio 1909, § 1.

[2] Rend. Acc. dei Lincei, 20 febbraio 1910. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* — Ibid., *Sopra le funzioni permutabili*, 17 aprile 1910.

2. Consideriamo la equazione integro-differenziale

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p|t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p|\tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0 .$$

Come equazione aggiunta assumeremo

$$(\mathrm{II}') \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p|t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p|\tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0 ,$$

ed avremo il teorema di reciprocità espresso dalla formula

$$(\mathrm{III}) \qquad 0 = \mathrm{K}_\sigma([u, v]) = \int_0^1 dt \left\{ \int_\sigma \left( v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum_1^p{}_i \left( v(t) \frac{\partial u(\tau)}{\partial x_i} - u(\tau) \frac{\partial v(t)}{\partial x_i} \right) f_i(t, \tau) \cos n x_i \, d\sigma \right\}$$

ove $\sigma$ è il contorno di un iperspazio $S_p$ nel campo $x_1, x_2, \dots x_p$ e $n$ ne è la normale esterna.

3. Si tratta ora di trovare la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta, e a tal fine sostituiamo $z f_i(t, \tau)$ a $f_i(t, \tau)$, onde le (II) e (II') diverranno

$$(\mathrm{II}_a) \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p\ t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p|\tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0$$

$$(\mathrm{II}'_a) \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p|t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p|\tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0 .$$

Ripetendo dei calcoli analoghi a quelli eseguiti per ottenere la funzione fondamentale nella prima delle Note precedentemente citate [1] noi avremo come funzione fondamentale della $(\mathrm{II}'_a)$, nella ipotesi $p > 2$,

$$(1) \qquad \mathrm{V}(x_1, x_2 \dots x_p|t) = \mathrm{F}(t)\, r^{2-p} +$$
$$+ \int_0^1 \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m \mathrm{F}(\xi)\, z^m\, d\xi}{2 \cdot 4 \dots 2m \cdot (4-p)(6-p) \dots (2(m+1)-p)} \times$$
$$\times \sum_{h_1 + \dots + h_p = m} \frac{\partial^{2m}\, r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \dots \partial x_p^{2h_p}} \mathrm{F}_{h_1, \dots h_p}(\xi, t) ,$$

ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione arbitraria, e

$$r = \sqrt{\sum_1^p{}_i (x_i - a_i)^2}$$

$$f_1(t, \tau) = \mathrm{F}_{1,0,\dots 0}(t, \tau) , \; f_2(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,1,\dots 0}(t, \tau) , \dots f_p(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,0,\dots 1}(t, \tau) .$$

$$\mathrm{F}_{h_1, h_2 \dots h_p}(t, \tau) = \int_0^1 \sum_{q_1 + q_2 + \dots + q_p = \varrho} \mathrm{F}_{q_1, q_2 \dots q_p}(t, \xi)\, \mathrm{F}_{h_1 - q_1, h_2 - q_2 \dots h_p - q_p}(\xi, \tau)\, d\xi .$$

[1] Rend. Acc. Lincei, 21 febbraio 1909, § 5.

La somma $\sum_{q_1+q_2+\cdots+q_p=\varrho}$ si intende estesa a tutti i valori interi di $q_1, q_2, \ldots q_p$ la cui somma è costante ed eguali a $\varrho$ mentre si suppone che una F con indici negativi sia nulla.

La serie (1) sarà convergente finchè $|z|$ sarà inferiore ad un dato limite.

Ciò premesso supponiamo che $f_1, f_2 \ldots f_p$ siano funzioni fra loro permutabili di 2ª specie (1). Allora, facendo uso della notazione, usata nella Nota ora citata, per denotare la operazione di composizione di seconda specie, potremo scrivere

$$F_{h_1,h_2\ldots h_p}(t,\tau) = N_{h_1,h_2\ldots h_p} \ddot{f}_1^{h_1} \ddot{f}_2^{h_2} \ldots \ddot{f}_p^{h_p}(t,\tau),$$

in cui $N_{h_1,h_2\ldots h_p}$ è un numero facilmente calcolabile mediante $h_1, h_2, \ldots h_p$. Avremo quindi che la (1) potrà scriversi

$$(1') \qquad V(x_1, x_2 \ldots x_p|t) = F(t)\, r^{2-p} + \\ + \int_0^1 \sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m F(\xi)\, z^m\, d\xi}{2.4\ldots 2m.(4-p)(6-p)\ldots(2(m+1)-p)} \times \\ \times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\ldots h_p} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \ldots \partial x_p^{2h_p}} \ddot{f}_1^{h_1} \ldots \ddot{f}_p^{h_p}(\xi, t).$$

4. Prendiamo ora l'equazione differenziale

$$\sum_1^p{}^i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + z \sum_1^p{}^i m_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0.$$

Purchè $|z|$ sia inferiore ad un certo limite, la soluzione fondamentale potrà scriversi

$$W = C r^{2-p} + \frac{(-1)^m C z^m}{2.4\ldots 2m.(4-p)(6-p)\ldots(2(m+1)-p)} \times \\ \times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\ldots h_p} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \ldots \partial x_p^{2h_p}} m_1^{h_1} \ldots m_p^{h_p},$$

ove C denota una costante arbitraria.

Ma questa stessa soluzione può mettersi anche sotto la forma

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^p{}^i \frac{(x_i - a_i)^2}{1 + z m_i}\right)^{\frac{p-2}{2}}},$$

(1) Rend. Acc. dei Lincei, 20 febbraio 1910, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 8.

e, se supponiamo $p = 2q$ con $q > 1$ e intero, avremo

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^{2q} \frac{(x_i - a_i)^2}{1 + zm_i}\right)^{q-1}},$$

ossia W sarà razionale in $z$, e potrà ancora scriversi

$$W = \frac{C}{r^{2q-2}} \frac{[(1+zm_1)(1+zm_2)\dots(1+zm_{2q})]^{q-1}}{\left\{1 + \sum_1^{2q} \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2}[(1+zm_1)\dots(1+zm_{i-1})(1+zm_{i+1})\dots(1+zm_{2q}) - 1]\right\}^{q-1}}$$

5. Da quanto è ora stato ottenuto si deduce il modo seguente per calcolare la richiesta funzione fondamentale della equazione aggiunta $(\mathrm{II}'_a)$.

Sia $f^{(1)}_{1,2,\dots,2q}(t,\tau)$ la somma algebrica delle funzioni $f_1(t,\tau), f_2(t,\tau)\dots f_{2q}(t,\tau)$. Denotiamo con $f^{(2)}_{1,2,\dots,2q}(t,\tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendo due a due le funzioni stesse, con $f^{(3)}_{1,2,\dots,2q}(t,\tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendole tre a tre e così di seguito.

Formiamo

$$z f^{(1)}_{1,2,\dots 2q}(t,\tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\dots,2q}(t,\tau) + \dots + z^{2q} f^{(2q)}_{1,2,\dots,2q}(t,\tau) = \chi(t,\tau)$$

quindi

$$(q-1)\chi(t,\tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\ddot{\chi}^2(t,\tau) + \\ + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3}\ddot{\chi}^3(t,\tau) + \dots + \ddot{\chi}^{q-1}(t,\tau) = A(t,\tau)$$

e

$$F(t) + \int_0^1 F(\xi) A(\xi, t)\, d\xi = \Phi(t).$$

Si calcoli poi

$$z f^{(1)}_{1,2,\dots i-1,\, i+1,\dots 2q}(t,\tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\dots i-1,\, i+1,\dots 2q}(t,\tau) + \dots z^{2q} f^{(2q-2)}_{1,2,\dots i-1,\, i+1,\dots 2q}(t,\tau) = \Psi_i(t,\tau),$$

$$\sum_1^{2q} \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2} \Psi_i(t,\tau) = \Psi(t,\tau),$$

$$(q-1)\Psi(t,\tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2}\ddot{\Psi}^2(t,\tau) + \\ + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3}\ddot{\Psi}^3(t,\tau) + \dots + \ddot{\Psi}^{q-1}(t,\tau) = \Theta(t,\tau),$$

e si risolva l'equazione integrale

$$V(t) + \int_0^1 V(\xi)\Theta(\xi, t)\, d\xi = \Phi(t). \tag{2}$$

$V(t)$ così ottenuto sarà evidentemente funzione anche di $x_1, x_2, \dots x_{2q}$ e di $z$,

e coinciderà colla (1'). Inoltre essa sarà una *funzione meromorfa di* $z$ la cui espressione verrà ottenuta come rapporto di due funzioni olomorfe di $z$.

6. Dalla (II') segue:

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n}\, d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum \frac{\partial V(\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau\,,\, t) \cos n x_i\, d\sigma =$$

$$= -\,2q\,(2q-2)\,\frac{(2\pi)^q}{2\,.\,4\,\ldots\,2q}\,F(t)\,,$$

supponendo che il polo $(a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\, a_{2q})$ sia interno all'iperspazio limitato dal contorno $\sigma$. Questa formula vale prendendo per V l'espressione meromorfa che si ricava dalla equazione integrale (2), comunque grande sia $|z|$, esclusi i valori di $z$ che annullano il determinante della equazione integrale.

Prendendo nella (III) $v = V$ ed escludendo il polo mediante uno spazio sferico che si fa tendere a zero, si trova al limite

$$K_\sigma([u\,,\, V]) = 2q\,(2q-2)\,\frac{(2\pi)^q}{2\,.\,4\,\ldots\,2q}\int_0^1 F(t)\, u_0(t)\, dt\,,$$

ove $u_0(t)$ denota il valore di $u(x_1\,,\ldots\, x_{2q}|t)$ al polo. Da questa formula si ricava subito $u_0(t)$, essendo $F(t)$ una funzione arbitraria.

Matematica. — *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

È noto che, data l'azione esterna di un corpo (in particolare della terra), si possono far corrispondere ad essa infiniti modi differenti di variazioni della densità del corpo, ed è noto ancora che sono però pienamente determinati alcuni elementi meccanici relativi al corpo stesso dipendenti dalla densità. Un notevole contributo allo studio della anzidetta indeterminazione di densità e della determinazione degli accennati elementi meccanici del corpo è stato apportato recentemente dal chrmo professore Pizzetti in una Memoria pubblicata nel vol. XVII degli Annali di Matematica (1).

Qui mi propongo di far vedere quale è il grado di indeterminazione della densità del corpo, corrispondente ad una assegnata azione esterna del corpo stesso, e come, servendosi della 2ª funzione di Green, possa determinarsi la più generale funzione potenziale di esso corpo; e di trovare ancora il più generale integrale definito, contenente la densità incognita, che risulta pienamente determinato dalla data azione esterna. Le medesime quistioni

(1) *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della terra.*

risolvo nell' ipotesi (ammissibile nel caso della terra) che, oltre all'azione esterna del corpo, siano dati alla sua superficie i valori della densità e della sua derivata normale.

Questi risultati e l'uso della 2ª funzione di Green, e in generale della funzione di Green di ordine $n$, per la sfera, per l'ellissoide di rotazione, ecc., potranno forse essere utili in uno studio dettagliato della funzione potenziale della terra.

### Caso in cui è nota la sola azione esterna.

1. Sia S una superficie chiusa, avente in ogni suo punto un piano tangente determinato. Si indichi con $\tau$ lo spazio finito limitato da S, con $\tau'$ quello infinito pure limitato da S; e si indichi con $n$ la normale nei punti di S, e si prenda per direzione positiva su questa normale quella che entra nel campo finito $\tau$. Riferiamo i punti dello spazio a tre assi cartesiani ortogonali $x, y, z$; e indichiamo con $\varrho(x, y, z)$ una funzione dei punti di $\tau$, per la quale l'espressione $\Delta^2\varrho$ sia finita ed atta all'integrazione nel campo $\tau$. Indichiamo con $(\xi, \eta, \zeta)$ un punto generico di $\tau$, con $(x, y, z)$ un punto qualsiasi dello spazio; e poniamo:

$$r = +\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$(1) \qquad V(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\tau.$$

È noto che la funzione $V(x, y, z)$ è finita e continua in tutto lo spazio insieme alle sue derivate prime, e che si ha:

$$\text{(nei punti di } \tau) \qquad \Delta^2 V = \varrho(x, y, z),$$
$$(\quad \text{»} \quad \tau') \qquad \Delta^2 V = 0.$$

Supponendo poi che la superficie S sia di quelle per le quali è risoluto il problema dell'integrazione dell'equazione doppia di Laplace [1], ed indicando con $G_2(x, y, z\ ;\ \xi, \eta, \zeta)$ la seconda funzione di Green corrispondente, si avrà [2]:

$$(2) \qquad V(x, y, z) = -\int_\tau G_2 \cdot \Delta^2\varrho\, d\tau + \int_S \left(\frac{d\Delta^2 G_2}{dn} V - \frac{dV}{dn}\Delta^2 G_2\right) dS.$$

2. Dati ad arbitrio nei punti di S i valori di V e di $\frac{dV}{dn}$, e pure ad arbitrio nei punti di $\tau$ i valori di $\Delta^4 V$, esiste, come è noto, una funzione $V(x, y, z)$ dei punti di $\tau$ ed una solamente, la quale nei punti di S prende

[1] Lauricella, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVI, 2° semestre.

[2] Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. XX, anno 1905,

i valori dati, e di cui la derivata normale nei punti di S coincide con i valori di $\frac{dV}{dn}$, il $\Delta^4$ nei punti di $\tau$ coincide con i valori dati di $\Delta^4 V$. Essa funzione può esprimersi mediante la formola:

$$(2)' \quad V(x,y,z) = -\int_\tau G_2 \cdot \Delta^4 V \, d\tau + \int_S \left( \frac{d\Delta^2 G_2}{dn} \cdot V - \frac{dV}{dn} \cdot \Delta^2 G \right) dS ;$$

ed ancora mediante l'altra:

$$(3) \quad V(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\Delta^2 V}{r} \, d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \left( V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dV}{dn} \frac{1}{r} \right) dS .$$

Se i valori di V e di $\frac{dV}{dn}$ nei punti di S sono rispettivamente i valori nei punti di S di una funzione armonica nel campo $\tau'$ e quelli della sua derivata normale, si ha, come è noto, nei punti $(x,y,z)$ di $\tau$:

$$(4) \quad 0 = \int_S \left( V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dV}{dn} \cdot \frac{1}{r} \right) dS ;$$

per cui risulterà:

$$(5) \quad V(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\Delta^2 V}{r} \, d\tau .$$

Questa formola ci dice che, *se i valori di* V *e di* $\frac{dV}{dn}$ *nei punti di* S *sono rispettivamente i valori nei punti di* S *di una funzione armonica nel campo* $\tau'$ *e quelli della sua derivata normale, la* V, *data dalla formola* (2)', *si può sempre esprimere mediante una funzione potenziale di massa distribuita nel campo* $\tau$, *qualunque siano i valori assegnati di* $\Delta^4 V$ *nei punti di* $\tau$.

Ed allora, poichè, in virtù della (2), la funzione potenziale di una qualsiasi distribuzione fatta nel campo $\tau$ può sempre mettersi sotto la forma (2)', se segue, tenendo conto dell'uguaglianza

$$(6) \quad \Delta^4 V = \Delta^2 \varrho ,$$

che *la funzione potenziale della più generale distribuzione che può immaginarsi fatta nel campo* $\tau$, *corrispondentemente ad una assegnata azione esterna, è data dalla formola* (2) *con* $\Delta^2\varrho$ *funzione arbitraria*; e così si può dire che, *prestabilita l'azione esterna di una massa distribuita nel campo* $\tau$, *ciò che rimane di arbitrario circa alla densità* $\varrho(x,y,z)$ *è il suo* $\Delta^2$.

Osserviamo ancora che se si suppone nulla l'azione esterna, dovrà aversi nei punti di S: $V = 0$, $\frac{dV}{dn} = 0$; e quindi in virtù delle (2)', (6) si ha che *la funzione*

$$V(x, y, z) = -\int_\tau G_2 . \Delta^2\varrho \, d\tau ,$$

*con $\Delta^2\varrho$ funzione arbitraria, rappresenta la funzione potenziale della più generale distribuzione fatta nel campo $\tau$ ad azione esterna nulla.*

3. I valori di $\frac{dV}{dn}$ sono determinati dai valori della funzione armonica V nei punti di S; sicchè deve essere possibile eliminare dalla formola (2) il termine contenente $\frac{dV}{dn}$. A tal fine si tenga fisso il punto $(x, y, z)$ di $\tau$ e si consideri una funzione $\Gamma(x, y, z ; \xi, \eta, \zeta)$ armonica nei punti $(\xi, \eta, \zeta)$ del campo $\tau'$ e tale che si abbia:

$$\text{(nei punti di S)} \qquad \Gamma = \Delta^2 G .$$

In forza del lemma di Green, risulterà dalla (2):

$$V(x, y, z) = -\int_\tau G_2 . \Delta^2\varrho . d\tau + \int_S \frac{d(\Delta^2 G - \Gamma)}{dn} V dS .$$

4. Sia $U(x, y, z)$ una funzione armonica qualsiasi del campo $\tau$, e $V(x, y, z)$ la solita funzione potenziale di una distribuzione fatta in $\tau$. Il lemma di Green ci dà:

$$0 = \int_\tau U\Delta^2 V d\tau + \int_S \left( U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) dS ;$$

e quindi:

$$\int_\tau \varrho U . d\tau = \int_S \left( V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) dS . \tag{7}$$

Questa formola ci dice che *l'integrale al primo membro, nel quale $U(x, y, z)$ è funzione armonica qualsiasi del campo $\tau$, dipende solo dall'azione esterna della massa distribuita in $\tau$.*

Di qui risultano subito come casi particolari i seguenti risultati ben noti: *data l'azione esterna di un corpo $\tau$,*

*$\alpha$) è determinata la massa totale del corpo stesso*: infatti basta fare $U = 1$ nella (7);

*$\beta$) è determinato il centro di massa di esso corpo*: infatti basta fare successivamente $U = x, = y, = z$ nella (7);

*$\gamma$) sono determinati gli assi principali di inerzia*: infatti basta porre successivamente $U = xy, = yz, = zx$ nella (7);

*δ) sono determinate le differenze fra i momenti principali d'inerzia*: infatti basta fare successivamente $U = x^2 - y^2$, $= y^2 - z^2$, $= z^2 - x^2$ nella (7).

È quasi superfluo osservare che, analogamente a quanto si è fatto al § 3. si può eliminare dalla formola (7) il termine contenente $\frac{dV}{dn}$.

5. Vogliamo dimostrare che la proprietà generale, contenuta nella formola (7), è caratteristica per le funzioni potenziali di spazio; ossia che, *data ad arbitrio l'azione esterna di un corpo* $\tau$, cioè, in termini più espliciti, dati ad arbitrio nei punti di S i valori di una funzione V armonica nel campo $\tau'$ $\left(\text{e quindi ancora quelli della sua derivata normale } \frac{dV}{dn}\right)$, *se* $\varrho(x, y, z)$ *è una funzione dei punti del campo* $\tau$, *la quale verifica l'equazione integrale* (7) *qualunque si sia la funzione armonica* $U(x, y, z)$, *la funzione potenziale della massa distribuita nel campo* $\tau$ *con densità* $\varrho(x, y, z)$ prende nei punti di S i valori arbitrariamente dati di V, ossia *ha un'azione esterna identica alla data.*

Infatti si ponga:

$$V_1(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\varrho(x, y, z)}{r}\, d\tau .$$

Dal lemma di Green e dal teorema di Poisson risulta, qualunque si sia la funzione armonica $U(x, y, z)$,

$$\int_\tau \varrho U d\tau = \int_S \left(V_1 \frac{dU}{dn} - U \frac{dV_1}{dn}\right) dS ;$$

e quindi, posto:

$$V_2(x, y, z) = V(x, y, z) - V_1(x, y, z),$$

si avrà in virtù della (7):

$$0 = \int_S \left(V_2 \frac{dU}{dn} - U \frac{dV_2}{dn}\right) dS , \tag{8}$$

qualunque si sia la funzione armonica U. Indicando con $r_1$ il vettore che parte da un punto $p_1$ qualsiasi dell'interno di $\tau'$ e va ai punti variabili di $\tau$, si può fare nella (8): $U = \frac{1}{r_1}$, e così si avrà, qualunque sia il punto $p_1$,

$$0 = \int_S \left(V_2 \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dV_2}{dn}\right) dS .$$

Ora la funzione $V_2$ è, come le funzioni $V$, $V_1$, armonica nel campo $\tau'$; sicchè potremo scrivere:

$$V_2(p_1) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left( V_2 \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dV_2}{dn} \right) dS ;$$

e quindi si avrà nei punti di $\tau'$: $V_2 = 0$, ossia: $V = V_1$, c. d. d.

6. Finora si è studiato l'integrale al primo membro della formola (7), supponendo che la funzione U fosse armonica nel campo $\tau$. Supponiamo ora soltanto che la funzione U sia tale che esista l'espressione $\Delta^2 U$ e che questa sia finita ed atta all'integrazione. Posto:

$$W(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{U}{r} d\tau ,$$

si avrà:

$$\int_\tau \varrho . U . d\tau = \int_\tau \Delta^2 V . \Delta^2 W d\tau =$$

$$= \int_\tau W . \Delta^4 V d\tau + \int_S \left( W \frac{d\Delta^2 V}{dn} - \Delta^2 V \frac{dW}{dn} \right) dS ,$$

ossia:

$$\int_\tau \varrho . U . d\tau = \int_\tau W . \Delta^2 \varrho . d\tau + \int_S \left( W \frac{d\Delta^2 V}{dn} - \Delta^2 V \frac{dW}{dn} \right) dS ;$$

ed allora, determinata una funzione $W_1$ tale che

(nei punti di $\tau$) $\Delta^4 W_1 = 0$ (nei punti di S) $W_1 = W, \frac{dW_1}{dn} = \frac{dW}{dn}$,

risulterà:

$$0 = \int_\tau W_1 . \Delta^4 V d\tau +$$

$$+ \int_S \left( W_1 \frac{d\Delta^2 V}{dn} - \Delta^2 V \frac{dW_1}{dn} + \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} - V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} \right) dS ;$$

e quindi:

$$(9) \quad \int_\tau \varrho U d\tau = \int_\tau (W - W_1) . \Delta^2 \varrho . d\tau + \int_S \left( V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} \right) dS .$$

Questa formola ci dice che, *data l'azione esterna della massa occupante lo spazio* $\tau$, *l'integrale al primo membro è determinato a meno dell'integrale*

$$(10) \qquad \int_\tau (W - W_1) . \Delta^2 \varrho . d\tau .$$

Affinchè l'integrale (10) abbia un valore indipendente da $\Delta^2\varrho$, è necessario e sufficiente che sia nei punti di $\tau$: $W = W_1$; e quindi che si abbia:

$$\text{(nei punti di } \tau) \qquad 0 = \Delta^4 W = \Delta^2 U .$$

Questo risultato e quello generale del § 4 ci dànno: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale*

$$(7)' \qquad \int_\tau \varrho U d\tau$$

*sia invariante rispetto a* $\Delta^2\varrho$, *è che la funzione* U *sia armonica.*

### Caso in cui, oltre all'azione esterna, sono dati in superficie i valori della densità e quelli della sua derivata normale.

7. Indicando con $G_4(x, y, z ; \xi, \eta, \zeta)$ (1) la funzione di Green del 4° ordine, si può scrivere, come è noto, per una qualsiasi funzione $V(x, y, z)$ finita e continua nel campo $\tau$ insieme alle sue derivate dei primi *otto* ordini (2):

$$V(x, y, z) = -\int_\tau G_4 . \Delta^8 V . d\tau + \\ + \int_S \left( \frac{d\Delta^6 G_4}{dn} V - \Delta^6 G_4 \frac{dV}{dn} + \frac{d\Delta^4 G_4}{dn} \Delta^2 V - \Delta^4 G_4 \frac{d\Delta^2 V}{dn} \right) dS .$$

Questa nel caso in cui $V(x, y, z)$ sia la funzione potenziale (1) ci dà:

$$(11) \qquad V(x, y, z) = -\int_\tau G_4 . \Delta^6 \varrho \, d\tau + \\ + \int_S \left( \frac{d\Delta^6 G_4}{dn} V - \Delta^6 G_4 \frac{dV}{dn} + \frac{d\Delta^4 G_4}{dn} \varrho - \Delta^4 G_4 \frac{d\varrho}{dn} \right) dS .$$

Di qui risulta che, *data ad arbitrio l'azione esterna di una distribuzione fatta in* $\tau$ *e dati pure ad arbitrio i valori della densità* $\varrho$ *e della sua derivata normale* $\frac{d\varrho}{dn}$ *nei punti della superficie* S, *la funzione* $V(x, y, z)$, *determinata dalla formola* (11), *è la funzione potenziale di una distribuzione in* $\tau$, *della quale l'azione esterna, la densità nei punti di* S *e la*

(1) Essendo stato dimostrato il teorema di esistenza per le funzioni poliarmoniche in condizioni molto generali, sia riguardo alla superficie contorno, sia ancora riguardo ai valori al contorno [v. Lauricella, *Sull'equazione* $\Delta^{2i}V = 0$ *e su alcune estensioni delle equazioni dell'equilibrio*, ecc. (Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, vol. III, pag. 33)], ne risulta dimostrata l'esistenza in generale della funzione di Green di ordine qualsiasi.

(2) Boggio, loc. cit.

*derivata normale di questa densità coincidono rispettivamente con quelle date, qualunque siano i valori che si assegnano per l'espressione* $\Delta^6\varrho$.

Infatti basterà osservare, come al § 2, che i valori di V e $\frac{dV}{dn}$ devono sempre soddisfare alla equazione (4), e che perciò, in virtù della (3), si ha la (5).

Adunque nel caso preso in considerazione tutto ciò che rimane di arbitrario circa alla densità $\varrho(x, y, z)$ è l'espressione $\Delta^6\varrho$.

8. Passiamo ora ad esprimere l'integrale studiato al § 6 mediante i nuovi elementi noti. Supposto che la funzione $U(x, y, z)$ sia tale che esista l'espressione $\Delta^2 U$, si ponga:

$$W(x, y, z) = -\frac{1}{4!\,4\pi}\int_\tau r^3\, U\, d\tau.$$

Si avrà:

(nei punti di $\tau$) $\qquad \Delta^6 W = U;$

e quindi:

$$(12)\quad \int_\tau \varrho U\, d\tau = \int_\tau \Delta^2 V.\,\Delta^6 W\, d\tau = \int_\tau W.\,\Delta^8 V\, d\tau - \int_S \left(\Delta^2 V\,\frac{d\Delta^4 W}{dn} - \frac{d\Delta^2 V}{dn}\,\Delta^4 W + \Delta^4 V\,\frac{d\Delta^2 W}{dn} - \frac{d\Delta^4 V}{dn}\,\Delta^2 W + \Delta^6 V\,\frac{dW}{dn} - \frac{d\Delta^6 V}{dn}\,W\right) dS\,.$$

Ora si determini una funzione $W_1(x, y, z)$ dei punti del campo $\tau$ tale che sia:

(nei punti di $\tau$) $\quad \Delta^8 W_1 = 0,$

(nei punti di S) $\quad W_1 = W,\ \frac{dW_1}{dn} = \frac{dW}{dn},\ \Delta^2 W_1 = \Delta^2 W,\ \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} = \frac{d\Delta^2 W}{dn}.$

Risulterà:

$$0 = \int_\tau W_1.\,\Delta^8 V\, d\tau - \int_S \left(V\,\frac{d\Delta^6 W_1}{dn} - \frac{dV}{dn}\,\Delta^6 W_1 + \Delta^2 V\,\frac{d\Delta^4 W_1}{dn} - \frac{d\Delta^2 V}{dn}\,\Delta^4 W_1 + \Delta^4 V\,\frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \frac{d\Delta^4 V}{dn}\,\Delta^2 W_1 + \Delta^6 V\,\frac{dW_1}{dn} - \frac{d\Delta^6 V}{dn}\,W_1\right) dS\,;$$

e quindi, sottraendo questa equazione membro a membro dalla (12), avremo:

$$\int_\tau \varrho U \, d\tau = \int_\tau (W - W_1)\, \Delta^8 V d\tau + \int_S \left\{ V \frac{d\Delta^6 W_1}{dn} - \frac{dV}{dn} \Delta^6 W_1 + \right.$$
$$\left. + \Delta^2 V \frac{d\Delta^4 (W_1 - W)}{dn} - \frac{d\Delta^2 V}{dn} \Delta^4 (W_1 - W) \right\} dS ,$$

ossia:

$$(13) \quad \int_\tau \varrho U d\tau = \int_\tau (W - W_1)\, \Delta^6 \varrho \, d\tau + \int_S \left\{ V \frac{d\Delta^6 W_1}{dn} - \frac{dV}{dn} \Delta^6 W_1 + \right.$$
$$\left. + \varrho \frac{d\Delta^4 (W_1 - W)}{dn} - \frac{d\varrho}{dn} \Delta^4 (W_1 - W) \right\} dS .$$

Adunque *tutto ciò che rimane di indeterminato sul valore dell'integrale al primo membro, allorquando è data l'azione esterna del corpo* $\tau$ *e sono dati ancora i valori di* $\varrho$ *e di* $\frac{d\varrho}{dn}$ *nei punti di* S, *è l'integrale contenente l'espressione* $\Delta^6 \varrho$.

9. Affinchè l'integrale contenente l'espressione $\Delta^6 \varrho$, che apparisce nella formola (13), sia indipendente da $\Delta^6 \varrho$, è necessario e sufficiente che nei punti di $\tau$ sia: $W_1 = W$; e quindi che si abbia:

$$0 = \Delta^8 W = \Delta^2 U,$$

ossia, come al § 6, che la funzione U sia armonica.

In questo caso la formola (13) si ridurrà alla (7).

Adunque si ha, come al § 6, che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale* (7)′ *sia invariante rispetto a* $\Delta^6 \varrho$ *è che la* U *sia funzione armonica.*

È utile osservare che, nota l'azione esterna di un corpo $\tau$, l'introduzione di certi nuovi elementi noti in superficie, come ad es. i valori di $\varrho = \Delta^2 V$ e di $\frac{d\varrho}{dn} = \frac{d\Delta^2 V}{dn}$ nei punti di S, non allarga il campo degli invarianti della forma (7)′ rispetto a ciò che rimane di arbitrario (rispetto a $\Delta^6 \varrho$ nel caso in considerazione) relativamente alla densità.

Meccanica. — *Determinazione dell'equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.* Nota di Pietro Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Liouville fu il primo (nel 1846) a cercare l'equazioni di Hamilton-Jacobi, corrispondenti ai problemi della meccanica con due gradi di libertà, integrabili mediante semplici quadrature. Egli ne trovò una di una forma molto importante, che si trova ora studiata nei migliori trattati di meccanica e di geometria differenziale.

Quarantacinque anni dopo il prof. Stäckel (1) pose il problema nei termini precisi e generali scritti nel titolo di questa Nota, e trovò, per le $n$ variabili, un caso d'integrabilità, che è l'immediata generalizzazione di quello del Liouville. Qualche hanno prima, studiando l'equazioni con due sole variabili indipendenti, egli aveva risoluto interamente il problema, determinando due nuovi casi d'integrabilità, oltre a quello del Liouville, e mostrando che non ne esistono altri.

Più tardi, nel 1904, il prof. Levi-Civita (2) determinò tutte le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè un'equazione di Hamilton-Jacobi sia integrabile per separazione delle variabili; lo studio delle quali condurrebbe senza dubbio alla soluzione completa del problema, vinta che fosse la ripugnanza alla fatica di calcoli assai lunghi e laboriosi.

Applicando il metodo in certe ipotesi restrittive, egli pervenne con una elegante analisi a un nuovo caso d'integrabilità, che è la generalizzazione alle $n$ variabili di uno dei casi trovati dallo Stäckel per due variabili.

Poco dopo, nel 1906, il prof. Dall'Acqua (3) riuscì con opportuni artifizî a fare uno studio esauriente dell'equazioni del Levi-Civita, ora ricordate, per il caso delle tre variabili, e trovò quattro espressioni per l'energia cinetica; le sole che dian luogo a equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.

In questo scritto io ho ripreso il problema in tutta la sua generalità; e, abbandonati i metodi finora usati, guidato più dall'intuizione che da una logica rigorosa, son pervenuto alla determinazione di $n+1$ equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili.

Resterebbe da dimostrare che quell'equazioni sono le sole rispondenti al problema: sulla qual cosa io non ho dubbio alcuno; ma non ne ho trovato finora una dimostrazione soddisfacente.

(1) *Habilitationsschrift*, Halle 1891. Math. Ann., Bd. XLII, pag. 537.
(2) *Sulla integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi* ecc. Math. Ann., Bd. 59.
(3) *Sulla integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi* ecc. Math. Ann., Bd. 66.

2. Sia

$$(1) \qquad \sum_{r,s=1}^{n} A_{rs} \frac{\partial V}{\partial q_r} \frac{\partial V}{\partial q_s} = 2\{V(q_1\, q_2 \ldots q_n) + h\}$$

un'equazione di Hamilton-Jacobi, ove il primo membro rappresenta una forma quadratica omogenea nelle $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ con coefficienti dipendenti dalla $q$, e $h$ una costante. Ammettiamo che abbia un integrale completo della forma

$$(2) \qquad V = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i\, , \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\, h);$$

il che si esprime dicendo che è integrabile mediante la separazione delle variabili.

In tale ipotesi è manifesto che la (1) deve essere il risultato dell'eliminazione delle $\alpha$ tra l'equazioni

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \varphi_i'(q_i\, , \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\, h) \qquad (i = 1\, , 2\, , \ldots n),$$

che si deducono dalla (2) mediante derivazioni. D'altra parte, scritto un sistema qualunque della forma (3), è chiaro che si dedurrà la V con quadrature; la quale sarà l'integrale completo di un'equazione del primo ordine, risultante dall'eliminazione delle $\alpha$. Ma cotesta equazione non sarà in massima del tipo (1), quadritica omogenea nelle derivate di V. Bisognerà dunque cercare quei particolari sistemi (3), che, mediante l'eliminazione delle $\alpha$, portano a un'equazione della forma (1).

La prima idea che viene in mente, per poco che si pensi alla questione posta in quei termini, è di prendere i secondi membri delle (3) uguali alla radice quadrata d'una espressione lineare rispetto alle costanti; ossia, di porre

$$(3') \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 = 2\psi_i(q_i) + \varphi_{i1}(q_i)\,\alpha_1 + \varphi_{i2}(q_i)\,\alpha_2 + \cdots + \\ + \varphi_{in-1}(q_i)\,\alpha_{n+1} + \varphi_{in}(q_i)\,.\,2h \qquad (i = 1\, , 2\, , \ldots n)\,.$$

L'eliminazione delle $\alpha$ porta subito all'equazione

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^3 - 2\psi_1(q_1) - 2\varphi_{1n}(q_1)\,h & \varphi_{11}(q_1) & \varphi_{12}(q_1) & \ldots & \varphi_{1n-1}(q_1) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 - 2\psi_2(q_2) - 2\psi_{2n}(q_2)\,h & \varphi_{21}(q_2) & \varphi_{22}(q_2) & \ldots & \varphi_{2n-1}(q_2) \\ \ldots\ldots\ldots\

che è del tipo (1). Infatti, indicando con $\Phi$ il determinante formato con le $\varphi_{rs}$, si ottiene con lo sviluppo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{in}} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 = 2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{in}} \psi_i(q_i) + h \right\}.$$

È l'equazione trovata dallo Stäckel. Per $n = 2$, essa si riduce alla forma di Liouville.

3. Un altro sistema (3), che si presenta alla mente come atto a fornire equazioni del tipo (1), è il seguente:

$$(2'') \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \varphi_{i1}(q_i)\,\alpha_1 + \varphi_{i2}(q_i)\,\alpha_2 + \cdots + \varphi_{in-1}(q_i)\,\alpha_{n-1} + \varphi_{in}(q_i)\,\sqrt{2h - \mathfrak{S}}$$

per $i = 1, 2, \ldots n$;

ove $\mathfrak{S}$ è una forma quadratica omogenea nelle $\alpha$ a coefficienti costanti.

Per eliminare le $\alpha$ risolviamo il sistema rispetto a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ e $\sqrt{2h - \mathfrak{S}}$; avremo, usando le notazioni precedenti,

$$\Phi \alpha_i = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{si}} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\Phi \sqrt{2h - \mathfrak{S}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{sn}} \frac{\partial V}{\partial q_s}.$$

Da quest'ultima si trae

$$\mathfrak{S} + \left[\frac{1}{\Phi} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_{sn}} \frac{\partial V}{\partial q_s}\right]^2 = 2h;$$

onde sostituendo in $\mathfrak{S}$ alle $\alpha$ le loro espressioni, si ottiene evidentemente una equazione del tipo (1).

Tale equazione, benchè abbia una forma più generale in apparenza, corrisponde in sostanza a quel caso di integrabilità trovato dal prof. Levi-Civita, del quale ho parlato in principio.

4. Il sistema (3'') del paragrafo precedente suggerisce tosto l'idea di prendere alcune equazioni lineari nella $\alpha$ e le rimanenti analoghe alla forma (3''), nel modo che segue:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \varphi_{11}(q_1)\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{1r}(q_1)\,\alpha_r$$

. . . . . .

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = \varphi_{r2}(q_r)\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{rr}(q_r)\,\alpha_r$$

$$(3''') \quad \frac{\partial V}{\partial q_{r+1}} = \varphi_{r+1,1}(q_{r+1})\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{r+1,r}(q_{r+1})\,\alpha_r + \Psi_{r+1}(q_{r+1}) \times$$

$$\times \sqrt{2h - \mathfrak{S}_{r+1} + \varphi_{r+1,r+1}(q_{r+1})\,\alpha_{r+1} + \cdots + \varphi_{r+1,n-1}(q_{r+1})\,\alpha_{n-1} + 2\varphi_{r+1,n}(q_{r+1})}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial V}{\partial q_n} = \varphi_{n1}(q_n)\,\alpha_1 + \cdots + \varphi_{nr}(q_n)\,\alpha_r + \Psi_n(q_n) \times$$

$$\times \sqrt{2h - \mathfrak{S}_n + \varphi_{n,r+1}(q_n)\,\alpha_{r+1} + \cdots + \varphi_{n,n-1}(q_n)\,\alpha_{n-1} + 2\varphi_{nn}(q_n)}$$

dove $\mathfrak{T}_s$ è una forma quadratica omogenea nelle $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_r$ con coefficienti dipendenti dalla sola $q_s$. Risolvendo le prime $r$ equazioni rispetto alle $\alpha$, e sostituendo le loro espressioni nelle rimanenti equazioni; poi elevando al quadrato, si trovano $n-r$ equazioni della forma

$$E_s + \mathfrak{T}_s = 2h + 2\varphi_{sn}(q_s) + \varphi_{s,r+1}(q_s)\,\alpha_{r+1} + \cdots + \varphi_{s,n-1}(q_s)\,\alpha_{n-1}$$
$$(s = r+1, \ldots n);$$

dove $E_s$, come del pari $\mathfrak{T}_s$, è una espressione quadratica omogenea nelle derivate della V. Da queste si possono eliminare le $n-r-1$ costanti $\alpha$; dopo di che si ottiene evidentemente una equazione del tipo (1) (per brevità, non la scrivo per disteso).

Attribuendo ad $r$ successivamente i valori $1, 2, \ldots n-1$ (ritenendo $\alpha_n = 0$), si ottengono $n-1$ equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili. Colle due trovate precedentemente, diventano in totale in numero di $n+1$. Si noti che per $r = 0$, ritenendo per convenzione $\alpha_0 = 0$, il sistema (3''') si riduce al (3').

Le $n+1$ equazioni ora trovate e i corrispondenti sistemi (3) potranno bensì ridursi sostanzialmente a un numero minore di tipi, specializzando le funzioni $\varphi$ e $\psi$, o trasformando in modo opportuno le variabili (e anzi ciò avviene effettivamente); ma lasciando interamente arbitrarie le $\varphi$ e $\psi$, e considerando le sole trasformazioni del tipo $Q_s = Q_s(q_s)$, quei sistemi (3) sono irreducibili l'uno all'altro; talchè, sotto questo punto di vista, si possono considerare distinti.

Ora è importante il fatto che, nel caso delle due e tre variabili ($n = 2, 3$) l'equazioni di Hamilton-Jacobi, che si deducono nel modo spiegato di sopra, coincidono con quelle determinate dagli autori citati (1); i quali dimostrarono che sono le sole integrabili mediante la separazione delle variabili. Dunque il fatto, che non esistono altre equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione delle variabili, oltre le $n+1$ determinate di sopra ($n$ essendo il numero delle variabili), è vero per $n = 2$ e 3. Ciò lascia pensare che sia vero per $n$ qualunque. Per dimostrare questo teorema, che esaurirebbe interamente la questione, ho tentato il metodo dell'induzione completa; ma si urta contro difficoltà, che non mi sembrano facili a superare. In attesa d'un momento di migliore ispirazione, ho creduto utile intanto di far conoscere i risultati raccolti in questa Nota.

(1) Coincidono anche rispetto alla U, come facilmente si deduce (per esempio) dalle equazioni di condizione del prof. Levi-Civita.

Matematica. — *Sulla formola di Stokes che serve a determinare la forma del Geoide.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio P. Pizzetti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisico-Chimica. — *Su la dissociazione dei sali idrati* [1]. Nota di Luigi Rolla, presentata dal Corrispondente A. Garbasso.

1. La determinazione di certi equilibrî che si formano fra coppie di sali idrati quando le loro curve di tensione di dissociazione hanno un punto di incontro ha un notevole interesse non solo per la teoria generale dell'affinità ma anche per lo studio della dissociazione dei sali misti.

Da vecchie esperienze di Wiedemann [2] si deduceva che al disotto di una certa temperatura $\theta$ la tensione di dissociazione del solfato di magnesio eptaidrato è minore di quella del solfato ferroso eptoidrato, mentre che, a temperature superiori, i rapporti s'invertono. Esiste dunque un equilibrio:

$$(1)\quad MgSO_4, 7H_2O + FeSO_4, 6H_2O \rightleftarrows FeSO_4, 7H_2O + MgSO_4, 6H_2O$$

alla temperatura $\theta$, mentre che a temperature inferiori si ha l'idratazione del $MgSO_4, 6H_2O$ e a quelle superiori l'idratazione del solfato ferroso esaidrato.

Le misure di Frowein [3] e Cohen [4] permettono di determinare, per interpolazione, la $\theta$, e di prevedere che un equilibrio simile a (1) si verifica anche per il solfato di zinco eptaidrato a una temperatura $\tau$.

Io mi sono proposto dapprima di determinare colla massima precisione queste temperature di trasformazione e di ricercare con quanta approssimazione esse possano venir calcolate colle formole fondamentali della termodinamica. Indi ho studiato le curve di tensione di dissociazione dei sali misti

$$MgSO_4, x FeSO_4, 7(1+x)H_2O$$
$$ZnSO_4, x FeSO_4, 7(1+x)H_2O$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova diretto dal prof. Guido Pellizzari.

[2] Cfr. Cohen e Van't Hoff, Studien zur Chemischen Dynamik, pag. 244.

[3] Zeitschrift f. phys. Ch. I (1887), 1.

[4] Landolt-Bürnstein, pag. 149 (1905).

alle temperature $\theta$ e $\tau$, affine di poter ricavare qualche proposizione che interessi la teoria generale.

2. Quando il $MgSO_4, 7H_2O$ è in presenza del $FeSO_4, 7H_2O$, nel vuoto, alla temperatura T, avviene un trasporto di vapor d'acqua dal sale di ferro a quello di magnesio ($T < \theta$), o dal sale di magnesio a quello di ferro ($T > \theta$). Quando una molecola-grammo di acqua viene trasportata dal solfato di ferro a quello di magnesio, si fa un lavoro

$$A = RT \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{2}$$

se $p_2, p_1$ sono le tensioni rispettive del solfato ferroso e del solfato di magnesio. Alla temperatura $\theta$, è

$$A = 0 .$$

Ma l'applicazione del principio dell'equilibrio mobile porta senz'altro all'espressione (1):

$$A = Q\left(\frac{\theta - T}{\theta}\right) \tag{3}$$

dove Q indica la differenza dei calori d'idratazione (per l'ultima molecola di acqua) dei due sali. L'integrazione viene eseguita ammettendo che $q$ (calore d'idratazione di ciascun sale) si mantenga costante entro limiti sufficentemente ristretti di temperatura. La (3) contiene le tre condizioni fondamentali che caratterizzano il realizzarsi della (1) e cioè

$$\text{per } T = \theta \quad , \quad A = 0$$
$$\text{per } T = 0 \quad , \quad A = Q$$

e infine

$$T\frac{dA}{dT} = A - Q . \tag{4}$$

Le determinazioni sperimentali possono dirci quale espressione di Q si deve assumere per integrare la (4).

Consideriamo uno dei due sali, per es. il solfato di magnesio e sostituiamo nella (4) il calore $q$ sviluppato quando 18 grammi di acqua si uniscono a $MgSO_4, 6H_2O$ senza produzione di lavoro esterno. Ammettendo che i volumi specifici del $MgSO_4, 7H_2O$ e $MgSO_4, 6H_2O$ siano trascurabili per rapporto al volume specifico del vapore; che i calori specifici a pressione costante degli stessi sali siano indipendenti dalla temperatura, e che infine

(1) Studien zur Chemischen Dynamik, pag. 247.

il vapor d'acqua possa trattarsi come un gas perfetto, si giunge mediante l'applicazione delle formule generali [1] all'espressione

$$\ln p_1 = \frac{M}{T} + N \ln T + Z \tag{5}$$

dove $p_1$ è la tensione di dissociazione del $MgSO_4, 7H_2O$ e M, N, Z sono delle costanti.

Che se poi si ammette che il volume specifico dell'acqua liquida sia trascurabile per rapporto a quello del vapore; che il calore specifico (a pressione costante) dell'acqua sia indipendente dalla temperatura e che il potenziale termodinamico totale [2] del vapore possa calcolarsi colla formola che serve per i gas perfetti, si esprime la tensione di vapore dell'acqua colla formula:

$$\ln p = \frac{a}{T} + b \ln T + c \tag{6}$$

essendo $a, b, c$ delle costanti.

Se ora si sostituisce nell'equazione fondamentale

$$q = -RT^2 \frac{d}{dT} \ln \frac{p_1}{p} \tag{7}$$

per $\ln p_1$ e $\ln p$ i loro valori dati dalle (5) e (6) si ha

$$q = -R[(N - b)T - M + a]. \tag{8}$$

Le ipotesi restrittive che hanno servito per dedurre le (5) e (6) fanno ritenere che queste non siano rigorose, ma l'esperienza dimostra che, almeno per intervalli non troppo grandi di temperatura, esse sono sufficentemente approssimate.

E infatti i calcoli di Nernst e Levy [3], portano a concludere che il grado di dissociazione $\gamma$ delle molecole doppie dell'acqua liquida in molecole semplici varia assai poco colla temperatura e si può ritenere, in via di approssimazione, che, per limiti sufficentemente ristretti, si mantenga costante. La formola calcolata da Nernst [4] per esprimere la tensione di vapore delle molecole semplici assume la forma:

$$[a] \quad \log p' = \log p - \log \frac{1+\gamma}{2\gamma} = -\frac{2936{,}39}{T} - 4{,}94 \log T + 23{,}44837$$

(1) Duhem, *Traité de Mécanique Chimique*, vol. II, pag. 81.
(2) Duhem, loc. cit., vol. II, pag. 14.
(3) Verh. d. deutschen phys. Gesell. *15*, 313 e segg.
(4) Ibid., pag. 319.

e, ammessa la costanza di $\gamma$ nell'intervallo tra 20° e 50°,

$$[a\,\text{bis}] \qquad \log p = \frac{-2936{,}39}{T} - 4{,}94 \log T + 23{,}44946.$$

In questa formula si è posto $\log \frac{1+\gamma}{2\gamma} = 0{,}00109$ (per T compreso tra 293,09 e 323,09). Colla [$a$ bis] si calcola la seguente tabella:

| T | $p$ calcolato | | $p$ trovato |
|---|---|---|---|
| | formula [$a$] | formula [$a$ bis] | (Holborn e Henning) |
| 293,09 | 17,506 | 17,517 | 17,51 |
| 393,09 | 31,775 | 31,78 | 31,71 |
| 313,09 | 55,251 | 55,19 | 55,13 |
| 323,09 | 92,39 | 92,47 | 92,30 |

L'esperienza insegna che nella (5) deve essere N tanto piccolo da potersi trascurare il prodotto N ln T in confronto agli altri due termini. Si arriva così all'espressione ricavata da Van't Hoff [1] e verificata da Frowein:

$$(9) \qquad \log p_1 = X - \frac{Y}{RT}$$

con X e Y costanti.

La formula approssimata di Nernst [2] avendo due costanti indipendenti dalla natura del sale non si presta evidentemente al calcolo dell'equilibrio definito dalla (1).

Infatti essa si scrive

$$\log p_1 = -\frac{q_1}{4{,}571\,T} + 1{,}75 \log T + 3{,}65$$

dove $q_1$, è il calore di dissociazione del sale a temperatura ordinaria e 3,65 la « costante chimica » dell'acqua.

Per il solfato ferroso si avrebbe

$$\log p_2 = -\frac{q_2}{4{,}571\,T} + 1{,}75 \log T + 3{,}65$$

e la condizione perchè alla temperatura assoluta $\theta$ si abbia $p_1 = p_2$ sarebbe $q_1 = q_2$ e le curve dovrebbero senz'altro coincidere.

La (8) si trasforma dunque nella

$$(10) \qquad \begin{aligned} q &= 4{,}571\,(Y - 2936{,}39 + 4{,}94 \times 0{,}4343\,T) \\ &= 4{,}571\,Y - \lambda \end{aligned}$$

essendo $\lambda$ il calore di vaporizzazione dell'acqua.

[1] Vorlesungen (1901), pag. 53.

[2] Applications of thermodynamics to chemistry, pag. 101.

Ma $\frac{dq}{dT}$ è allora una costante e quindi, sostituendo nella (4) scritta sotto la forma

$$A = -T\int \frac{-\varrho - \sigma T}{T^2}\,dT - cT$$

(con $\varrho$, $\sigma$, $c$ costanti) e integrando si ha [1]

$$(11)\quad A_1 = -4{,}571\,[Y_1 - 2936{,}39] + 4{,}94 \times 4{,}571\,T\log T + C_1T\,.$$

Ma

$$(12)\quad A = RT\ln\frac{p_1}{p}$$

e da un valore di A si può calcolare la costante d'integrazione C, quando si conosca Y per mezzo della (9).

Per una coppia di sali per cui si abbia

$$A_1 = -4{,}571\,[Y_1 - 2936{,}39] + 4{,}94 \times 4{,}571\,T\log T + C_1T$$
$$A_2 = -4{,}571\,[Y_2 - 2936{,}39] + 4{,}94 \times 4{,}571\,T\log T + C_2T$$

sarà

$$(13)\quad \theta = \frac{Q_0' - Q_0''}{C_1 - C_2}$$

ponendo

$$Q_0' = -4{,}571\,[Y_1 - 2936{,}39]$$
$$Q_0'' = -4{,}571\,[Y_2 - 2936{,}39]\,.$$

Dunque la temperatura alla quale si verifica la (1) è proporzionale alla differenza dei calori d'idratazione dei due sali allo zero assoluto. Infatti per $T = 0$ si ha

$$A = -4{,}571\,[Y - 2936{,}39) = Q_0\,.$$

$\theta$ sarà positiva e quindi avrà un senso fisico, solo se $Q_0' - Q_0''$ e $C_1 - C_2$ saranno diversi da zero e dello stesso segno.

La (10) poi permette di calcolare i calori d'idratazione.

3. Se si ammette che il calore specifico dei sali diversamente idratati e quello della forma di condensazione del vapor d'acqua (supponiamo che si tratti di ghiaccio) siano una funzione lineare della temperatura assoluta, ferme restando le ipotesi che hanno condotto alle (5) e (6), si ha per $q$ una espressione della forma:

$$q = q_0 + \eta T + T^2$$

con $q_0$, $\eta$, $\zeta$ costanti.

[1] Cfr. Van't Hoff, Boltzmann's Festschrift (1904), pag. 234.

L'ipotesi che costituisce il « Wärmetheorem » di Nernst permette allora di far scomparire il termine in T, e si ha

$$\text{(11 bis)} \qquad \begin{cases} q = q_0 + \zeta T^2 \\ A = q_0 - \zeta T^2 \end{cases}$$

e dunque

$$\text{(13 bis)} \qquad \theta = \sqrt{\frac{q_0' - q_0''}{\zeta' - \zeta''}}$$

dove i simboli hanno significati ovvii.

Dal punto di vista dell'equilibrio che ci occupa, gli idrati possono dunque essere classificati fondandosi sul valore relativo di $\zeta$ e di $q_0$ per ciascuna coppia che si considera.

Nernst [1] distinse, in base alla sua teoria, tre specie di idrati a seconda che è $\zeta \gtreqless 0$. Nel primo caso, $q > A$; (per es. $CuSO_4H_2O = CuSO_4 + H_2O$); nel secondo $q = A$; $[(COOH)_2, 2H_2O = (COOH)_2 + 2H_2O]$; nell'ultimo $q < A$; $[K_2FeCy_6, 3H_2O = K_2FeCy_6 + 3H_2O]$.

La (13 bis) dice che l'equilibrio (1) si verifica per quelle coppie di sali che perdono lo stesso numero di molecole d'acqua dissociandosi, e per cui $(q_0' - q_0'')$ e $(\zeta' - \zeta'')$ sono dello stesso segno.

Bisogna naturalmente restringersi ai valori di $\theta$ compresi nel campo di esistenza degli idrati che si considerano.

E, in particolare, un sale della terza serie darà luogo alla (1) con ciascuno di quelli della seconda e della prima, purchè il suo calore d'idratazione allo zero assoluto sia inferiore a quello che compete agli altri. Questa condizione si verifica per il solfato ferroso esaidrato in confronto a molti idrati, giacchè secondo una tabella calcolata da Schottky [2] esso si combina totalmente col ghiaccio con reazione endotermica $(A > q)$.

Ma i dati sperimentali per verificare queste conseguenze della teoria mancano quasi totalmente. I valori calcolati da Schottky, dalle misure di Frowein, Cohen e Lescoeur portano ad errori enormi nel calcolo di $\theta$ per mezzo della (13 bis).

4. Ho verificato la (13) facendo delle misure col tensimetro differenziale del Van't Hoff [3]. In una boccia mettevo del solfato ferroso eptaidrato purissimo e nell'altra del solfato di magnesio pure a sette molecole di acqua, e, fatto il vuoto con una buona pompa a mercurio, e dopo essere stato lasciato in riposo in posizione orizzontale, per parecchie ore, l'apparecchio ve-

[1] Journal de Chimie Physique, VIII, 246; Sitzungsberichte der preuss. Akad. *12*, 247-282 (1910).

[2] Zeitschrift f. phys. Ch. (1908) *64*, 619.

[3] Vorlesungen über Spaltung u. Bildung von Doppelsalzen, pag. 95.

niva immerso in un termostato colle pareti frontali di cristallo. La temperatura $\theta$, alla quale il livello della paraffina delle due branche del manometro è eguale, veniva misurata con un termometro a mercurio, controllato, capace di dare il decimo di grado, ed era raggiunta per tentativi, lasciando trascorrere però di volta in volta il tempo necessario per il raggiungimento della *tensione massima* (una giornata).

La riprova della giustezza dell'osservazione si aveva innalzando o abbassando, di una frazione di grado, la temperatura. Si osservava allora un dislivello nella paraffina, o in un senso o nell'altro, apprezzabile assai bene col catetometro.

La discordanza, benchè lieve, delle diverse misure può spiegarsi secondo Le Chatelier [1]) coll'ammettere che i fenomeni capillari non siano del tutto trascurabili.

Per la coppia $FeSO_4, 7H_2O$ ; $MgSO_4, 7H_2O$ si raggiunse la stessa altezza nelle branche del manometro in sette esperienze successive alle seguenti temperature:

43°,95 ; 44°,0 ; 44°,10 ; 44°,0 ; 45°,05 ; 43°,90 ; 44°,1.

In media: 44°,01 . $\theta = 317{,}10$ .

Dalle misure di Frowein e di Cohen si deduce, per mezzo della (11):

| | $q_0$ | C | A | |
|---|---|---|---|---|
| $FeSO_4, 7H_2O$ | 1108 | — 60,544 | 255,07 | (T = 303,77) |
| $MgSO_4, 7H_2O$ | — 1129 | — 53,527 | 488,38 | (T = 293,15), |

e da questi valori, si calcola colla (13)

$$\theta = 318°{,}80 .$$

5. Ponendo in una boccia del tensimetro una miscela di $MgSO_4, 7H_2O$ e $FeSO_4, 7H_2O$ e nell'altra uno di essi, per es. il solfato ferroso, si nota che la differenza di tensione, considerevole a temperatura ordinaria, va di mano in mano diminuendo fino alla temperatura $\theta$ . Allora si ha l'uguaglianza di livello della paraffina nelle due branche del manometro, e si può controllare di volta in volta il resultato dell'esperienza diretta descritta nel paragrafo precedente.

La differenza nei valori di $\theta$ trovati per questa via è sempre compresa nei limiti degli errori sperimentali inerenti a questo genere di misure. Intanto si può escludere che a quella temperatura possano i due sali reagire in un modo qualunque fra di loro, e ciò legittima la ricerca della tensione di dissociazione dei sali misti $MgSO_4, x\,FeSO_4\,7(1+x)H_2O$ al variare di $x$, *per la temperatura alla quale* $p_1 = p_2$ .

[1]) Zeitschrift für phys. Ch. LXIX, 90 (1909).

Le misure ebbero per risultato di stabilire con certezza che nel caso dei cristalli rombici (nei quali si può concepire il $MgSO_4, 7H_2O$ come solvente) il sale misto ha una tensione maggiore dei suoi componenti; per i cristalli monoclini invece i rapporti s'invertono.

Le esperienze furono condotte in modo da eliminare per quanto era possibile le numerose cause d'errore: non è possibile però attribuire ad esse, come a tutte quelle dello stesso genere, un valore rigorosamente quantitativo.

I resultati di esse insieme con quelli di alcune misure di solubilità e di calore di soluzione che possono avere un interesse per la teoria verranno esposti in una prossima Nota.

Chimica. — *Nuovi composti di sali metallici idrati con l'esametilentetrammina. (Forme labili di idratazione fissate mediante una base organica)* [1]. Nota II di G. A. Barbieri e F. Calzolari, presentata dal Socio G. Ciamician.

Abbiamo descritto nella Nota I [2] una serie di composti formati da sali metallici con l'esametilentetrammina e corrispondenti alla formula generale $M''X_2 . 10H_2O . 2C_6N_4H_{12}$, in cui M'' significa Magnesio, Manganese, Cobalto, Nickel e X = Cloro, Bromo, Jodio.

Se si confrontano questi composti con i corrispondenti sali metallici idrati che si possono ottenere cristallizzati allo stato libero, si constata che ad eccezione del cloruro di Magnesio che può dare un idrato con 12 molecole di acqua [3] (stabile però soltanto sotto — 16°) tutti gli altri sali alogenati dei metalli suddetti presentano negli idrati liberi un grado d'idratazione ch'è generalmente inferiore, di rado eguale a quello che raggiungono nei composti con l'esametilentetrammina. Infatti per i cloruri di Manganese, Cobalto e Nickel, per i bromuri di Manganese e Cobalto e per il joduro di Nickel l'idratazione massima è rappresentata da sei molecole di acqua: per il bromuro di Nickel e per i joduri di Manganese e Cobalto si conoscono idrati con nove molecole di acqua e soltanto per il bromuro e il joduro di Magnesio sono stati descritti idrati con dieci molecole di acqua.

Nella previsione che l'azione fissatrice dell'esametilentetrammina sulle forme d'idratazione avrebbe potuto esplicarsi oltre che nei sali alogenati, in altre sorta di sali, abbiamo fatto reagire l'esametilentetrammina sui solfocianuri, nitrati, perclorati di Magnesio, Manganese, Cobalto, Nickel e sul

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della L. Università di Ferrara.

[2] Questi Rendiconti, 1910, II, 584.

[3] Van't Hoff, Meyerhoffer Ch. C. Bl., 1898, II, 915; Bogodoroski, Ch. C. Bl., 1899, I, 246.

solfocianuro ferroso e abbiamo ottenuto molti nuovi composti cristallizzati verosimilmente analoghi, quanto alla costituzione, a quelli descritti nella Nota precedente.

Il confronto fra il grado d'idratazione di questi nuovi composti e quello dei corrispondenti sali idrati liberi conduce alla stessa conclusione alla quale si è giunti più sopra per i composti alogenati. Infatti mentre nella letteratura si trovano descritti il solfocianuro di Magnesio con quattro molecole di acqua, i solfocianuri di Manganese, Ferro e Cobalto con tre, e quello di Nickel con una molecola e mezza di acqua, noi abbiamo ottenuto con l'esametilentetrammina dal solfocianuro di Magnesio il composto $Mg(SCN)_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$, e dai solfocianuri degli altri metalli, dei composti aventi la formula generale

$$M''(SCN)_2 . 4\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12} \qquad M'' = Mn, Fe, Co, Ni.$$

Il composto di Magnesio e quello di Manganese possono venir ricristallizzati dall'acqua senza alterarsi: invece i composti di Ferro, Cobalto e Nickel quando vengono ricristallizzati pèrdono una molecola di esametilentetrammina trasformandosi in composti che corrispondono alla formula generale

$$M''(SCN)_2 . 4\,H_2O . C_6N_4H_{12} \qquad M'' = Fe, Co, Ni$$

e che sono fra loro isomorfi.

I nitrati di Magnesio, Cobalto, Nickel e probabilmente anche quello di Manganese (1), oltre agli esaidrati, possono dare degli idrati con nove molecole di acqua. I composti di detti nitrati con l'esametilentetrammina corrispondono alla formula generale

$$M''(NO_3)_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12} \qquad M'' = Mg, Mn, Co, Ni.$$

Anche questi composti sono fra loro isomorfi.

I perclorati dei metalli pesanti vennero preparati da Serullas (2) che però non ne determinò l'acqua di cristallizzazione. Recentemente R. Salvadori (3) ha descritto il perclorato di Cobalto con sei molecole di acqua.

Dalle soluzioni dei perclorati di Magnesio, Manganese, Cobalto, Nickel l'esametilentetrammina separa dei composti cristallizzati corrispondenti alla formula generale

$$M''(ClO_4)_2 . 8\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12} \qquad M'' = Mg, Mn, Co, Ni.$$

Tutti i composti dei perclorati possono venir ricristallizzati dall'acqua e sono fra loro isomorfi.

(1) R. Funk, Z. f. anorg. Ch. 20, 393, (1899).
(2) A. ch. phys., 46, 305.
(3) Gazz. Chim., 40, II, 15, (1910).

## Parte sperimentale.

Nella preparazione dei composti che vengono qui descritti si procedette come per i composti alogenati della Nota precedente.

L'esametilentetrammina venne aggiunta in soluzione acquosa e concentrata alle soluzioni acquose e concentrate dei sali metallici. Le soluzioni dei solfocianuri e dei perclorati vennero talvolta preparate dai carbonati metallici coi rispettivi acidi ma spesso s'impiegarono le soluzioni dei solfati o degli acetati addizionate di solfocianuro di potassio o di perclorato di sodio.

Nelle analisi l'anione solfocianico venne determinato volumetricamente col metodo Volhard. L'azoto nitrico nei nitrati si dosò col metodo Schultze e Tiemann: l azoto dell'esametilentetrammina come ammoniaca previa eliminazione dell'azoto nitrico con solfato ferroso nei nitrati e dell'acido solfocianico con solfato di argento nei solfocianuri.

I dati cristallografici che si trovano in questa Nota, sono dovuti al prof. dott. E. Billows dell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Padova, che ebbe la cortesia di misurare alcuni dei nostri composti.

*Solfocianuro di magnesio idrato ed esametilentetrammina.*

$Mg(SCN)_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$

Cristalli incolori jalini tabulari molto sottili, lunghi da 3 a 7 mm.

Classe di simmetria: $\omega_7$ (olosimmetrica del sistema triclino).

Costanti $a : b : c = 0{,}9342 : 1 : 0{,}9223$

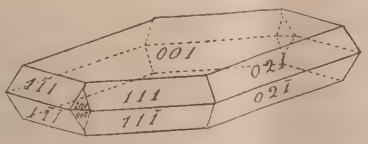
$\alpha = 134°.12' ; \beta = 47°.4' ; \gamma = 120°.56'$

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 19,33 | 19,70-19,44-19,34 |
| N(ammon) | 18,65 | 18,64 |

*Solfocianuro di manganese idrato ed esametilentetrammina.*

$Mn(SCN)_2 . 4\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$

Cristalli incolori jalini appiattiti secondo {001}.




Classe di simmetria: $\omega_3$ (olosimmetrica del sistema dimetrico).

Costanti $a : c = 1 : 1{,}0366$

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 22,19 | 22,20 |
| N(ammon) | 21,41 | 21,32 |

*Solfocianuro ferroso idrato ed esametilentetrammina.*

$Fe(SCN)_2 . 4H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Squamette cristalline, bianche appena preparate: all'aria e alla luce ingialliscono lievemente. La soluzione acquosa del composto è verdastra e si altera rapidamente all'aria: imbrunisce e lascia depositare una miscela di idrato ferroso e idrato ferrico.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 22,15 | 21,93 |
| N | 21,37 | 21,12 |

$Fe(SCN)_2 . 4H_2O . C_6N_4H_{12}$

Se si prepara a caldo una soluzione concentrata del composto precedente e dopo filtrata si protegge dall'azione dell'aria con uno strato di petrolio e si lascia raffreddare, si ottengono dei bei cristalli di color giallo canarino tendenti al verdastro. Alla luce e all'aria si alterano diventando rossastri ed opachi.

Classe di simmetria $\omega_1$ (olosimmetrica del sistema triclino).

Costanti $a : b : c = 1,4012 : 1 : 1,5723$

$\alpha = 124°.57' ; \beta = 29°.54' ; \gamma = 121°.36'$

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 30,24 | 29,79 |
| N(ammon) | 14,58 | 13,98 |

I risultati analitici non sono molto soddisfacenti. Ciò dipende dalla difficoltà di ottenere e conservare il composto allo stato di purezza. Però l'isomorfismo di questo composto col composto $Co(SCN)_2 . 4H_2O . C_6N_4H_{12}$ che sarà più sotto descritto, conferma la formula che gli abbiamo attribuito.

*Solfocianuro cobaltoso idrato ed esametilentetrammina.*

$Co(SCN)_2 . 4H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Squamette rosee, lucenti.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 22,02 | 21,96 |
| N(ammon) | 21,24 | 21,44 |

$Co(SCN)_2 . 4H_2O . C_6N_4H_{12}$

Quando si prepara una soluzione concentrata a caldo del composto precedente si separa dell'idrato cobaltoso e un sale basico verdastro insolubile in acqua. Dalla soluzione filtrata si formano per raffreddamento dei cristalli tabulari di color rosso-granatino scuro.

Classe di simmetria: $\omega_7$ (olosimmetrica del sistema triclino).

Costanti $a : b : c = 1{,}4232 : 1 : 1{,}6034$

$\alpha = 128°.23' ; \beta = 31°.6' ; \gamma = 123°.33'$

Dalle misure cristallografiche risulta che questo composto è isomorfo col composto ferroso $Fe(SC)_2 . 4H_2O . C_6N_4H_{12}$.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 29,99 | 29,91 |
| Co | 15,22 | 15,41 |
| N(ammon) | 14,47 | 14,52 |

*Solfocianuro di nickel idrato ed esametilentetrammina.*

$Ni(SCN)_2 . 4H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Polvere cristallina verde.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 22,03 | 22,11 |

$Ni(SCN)_2 . 4H_2O . . C_6N_4H_{12}$

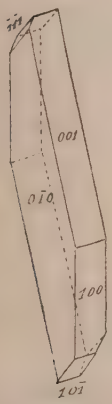



Fig. 2.

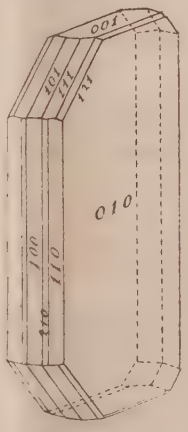



Fig. 3.

Si ottiene ricristallizzando il composto precedente dall'acqua. Cristalli tabulari di color verde smeraldo.

Classe di simmetria: $\omega_7$ (olosimmetrica del sistema triclino). Forma cristalli misti col composto $Co(SCN)_2 . 4H_2O . C_6N_4H_{12}$ in tutti i rapporti.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| SCN | 30,01 | 30,04 |

*Nitrato di magnesio idrato ed esametilentetrammina.*

$Mg(NO_3)_2 . 10H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Cristalli incolori, jalini, tabulari.

Classe di simmetria: $\omega_5$ (olosimmetrica del sistema trimetrico).

Costanti $a : b : c = 0{,}8261 : 1 : 0{,}4813$

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Mg | 3,99 | 4,10 |
| N(ammon) | 18,41 | 18,40 |

*Nitrato di manganese idrato ed esametilentetrammina.*

$Mn(NO_3)_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$

Cristalli somigliantissimi ai precedenti.

Classe di simmetria: $\omega_5$ (olosimmetrica del sistema trimetrico).

Costanti $a : b : c = 0{,}8388 : 1 : 0{,}4894$

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Mn | 8,59 | 8,50 |
| N(nitrico) | 4,38 | 3,97 |
| N(ammon) | 17,53 | 17,78 |

*Nitrato cobaltoso idrato ed esametilentetrammina.*

$Co(NO_3)_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$

Si ottiene cristallizzato in squamette rosee: dà soluzioni solide in tutti i rapporti coi composti precedenti di Magnesio e di Manganese.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Co | 9,17 | 9,13 |
| N(ammon) | 17,42 | 17,56 |

*Nitrato di nickel idrato ed esametilentetrammina.*

$Ni(NO_3)_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$

Cristallizza in squamette verde-smeraldo. Forma soluzioni solide in tutti i rapporti coi composti precedenti analoghi di Magnesio, Manganese e Cobalto.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Ni | 9,13 | 9,31 |

*Perclorato di magnesio idrato ed esametilentetrammina.*

$Mg(ClO_4)_2 . 8\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$

Aghetti incolori, lucenti.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Mg | 3.75 | 3,71 |
| N | 17,22 | 16,96 |

*Perclorato di manganese idrato ed esametilentetrammina.*

$Mn(ClO_4)_2 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Cristalli simili ai precedenti.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Mn | 8,10 | 9,02 |
| N | 16,52 | 16,32 |

*Perclorato di cobalto idrato ed esametilentetrammina.*

$Co(ClO_4)_2 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Cristallizza in aghi rosei. Forma soluzioni solide col composto $Mg(ClO_4)_2 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$ e col composto $Mn(ClO_4)_2 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Co | 8,64 | 9,02 |
| N | 16,42 | 16,32 |

*Perclorato di nickel idrato ed esametilentetrammina.*

$Ni(ClO_4)_2 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Cristallizza in aghi verdi. È isomorfo coi composti corrispondenti di Magnesio, Manganese e Cobalto.

| | Calcolato | Trovato |
|---|---|---|
| Ni | 8,60 | 8,51 |
| Cl | 10.40 | 10,28 |
| N | 16,43 | 16,03 |

Chimica. — *Sulla sintesi diretta dei gliceridi* (1). Nota di I. Bellucci e R. Manzetti, presentata dal Socio E. Paternò.

Berthelot è stato il primo a provare che dalla unione della glicerina con i corrispondenti acidi grassi si possono direttamente ricostruire i comuni gliceridi ad elevato numero di atomi di carbonio. Dalle sue ricerche, svoltesi circa sessanta anni fà, appare ben evidente come egli si fosse soprattutto prefisso di dimostrare l'identità dei prodotti sintetici da lui ottenuti con i grassi naturali, senza troppo preoccuparsi delle modalità sperimentali in cui si svolgevano le relative reazioni. Ricordiamo infatti che Berthelot riscaldava ad elevata temperatura (200°-260°), in tubi chiusi alla lampada e per un tempo generalmente molto lungo, miscele di acido grasso e glicerina (o anche di acido grasso e mono- e digliceride), nelle quali prevaleva, a seconda dei casi, un forte eccesso di parte acida o di glicerina.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.

Il processo di eterificazione era in tal modo sempre molto incompleto, la qual cosa fece quasi ritenere a Berthelot che esso non potesse in realtà svolgersi totalmente, così da indurlo ad esprimersi nel modo seguente (1):

« Quel que soit le procédé employé pour unir la glycérine à un acide, la combinaison n'est jamais complète. Toujours et simultanément, une grande partie de l'acide ou une partie de la glycérine demeurent sans s'unir. Ce fait résulte des conditions dans lesquelles les corps gras neutres se dédoublent, spécialement de l'action décomposante de l'eau, produit nécessaire de la reaction ».

È ben naturale infatti come col metodo Berthelot non si possa ottenere che un rendimento molto debole in gliceride, data l'azione saponificante che l'acqua generatasi esercita, entro il tubo chiuso, sul gliceride stesso, all'elevata temperatura della reazione. Basta a tal uopo ricordare il noto processo, che ha avuto anche applicazione industriale, della saponificazione dei grassi appunto per mezzo del vapor d'acqua sotto grandi pressioni.

Dopo Berthelot, pochi ancora hanno tentato la sintesi diretta dei gliceridi (2) in condizioni più o meno felici di reazione, ottenendo risultati ben poco diversi. Fra le altre, degne di nota sono le ricerche compiute da Schej (3) il quale ha effettuato l'eterificazione diretta della glicerina con i soli acidi grassi saturi. Lo Schej ha ripreso da Berthelot ed ha applicato il concetto di impiegare in tali eterificazioni un eccesso di acido: ma, invece di tenere la miscela acido-glicerina in tubo chiuso, durante il riscaldamento (200°), egli vi ha fatto gorgogliare attraverso una corrente di aria secca che aspirava diminuendo parzialmente la pressione nell'interno dell'apparecchio. Non ostante questa modificazione, veramente poco felice (lo Schej fa gorgogliare nella miscela grassa l'ossigeno atmosferico ad elevata temperatura), l'eterificazione di una certa quantità di glicerina non si effettuava che in un tempo molto lungo (anche di tre giorni!).

Se adunque, dal punto di vista puramente scientifico, può asserirsi che la sintesi dei principali gliceridi è stata realizzata da Berthelot e rappresenta perciò un fatto compiuto, ben restano da precisare le modalità, finora tanto imperfette, secondo cui essa può nel miglior modo effettuarsi. E la questione, oltrechè interessante per diversi lati teorici, risulta connessa, per taluni dei gliceridi (es.: trioleina), ad una notevole importanza dal punto di vista industriale, tutte le volte che la sintesi di questi potesse realmente svolgersi in condizioni rapide ed economiche.

(1) Annal. de chim. et phys. [3] *41*, 308 (1854).

(2) Vedi in proposito i più recenti e principali trattati sulle materie grasse (Lewkowitsch 1906, Benedikt-Ulzer 1908, Ulzer e Klimont 1906, Hefter 1906-1910).

(3) Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas [2] *18*, 169 (1899).

Noi abbiamo perciò creduto interessante di occuparci della sintesi diretta dei gliceridi rivolgendó i nostri tentativi ad ottenere in breve tempo una *eterificazione completa,* partendo da *quantità stechiometriche* di acido grasso e di glicerina, come ancora non era stato realizzato dai precedenti sperimentatori.

Prendendo in esame l'influenza che le variazioni di pressione possono ad una temperatura favorevole esercitare su tale eterificazione, abbiamo osservato che la pressione stessa ha sull'andamento della reazione un'influenza veramente fondamentale.

Noi abbiamo riscaldato nel vuoto (mantenuto costantemente a mezzo di una pompa per tutta la durata della reazione) *quantità stechiometriche* di acido oleico e di glicerina a temperature variabili e gradualmente elevantisi (160°-260°). In queste condizioni, spingendo il vuoto in taluni casi anche soltanto a 2 cm. di mercurio, si ha una eliminazione graduale, ben visibile e rapida di vapor d'acqua, che va abbondantemente a condensarsi in torrette di essicamento intercalate fra la pompa e l'apparecchio di reazione. In capo a breve tempo, un paio d'ore, si ha una *eterificazione praticamente completa* (rendimento 95-98 % in trioleina), data la favorevole circostanza che durante la reazione, in merito anche ad una conveniente e semplicissima disposizione dell'apparecchio, non sfuggono menome quantità nè di glicerina nè di acido grasso.

Seguendo questo processo, sempre con l'impiego di opportune quantità stechiometriche, uno di noi, insieme al laureando sig. Bachilli, ha già ottenuto con lo stesso rendimento numerosi altri gliceridi, semplici e misti, tutti ben identificati con l'esame delle relative costanti fisiche e chimiche.

Con questo nostro metodo si ha non solo il vantaggio di mantenere sopra la massa reagente un ambiente inerte, ma principalmente quello di abbassare la temperatura necessaria a realizzare una notevole velocità di reazione ed a conservare nello stesso tempo inalterata la miscela reagente. Non si ha in tal modo formazione di sottoprodotti (acroleina, ecc.), e volendo ottenere il gliceride in stato di completa purezza, non resta che lavarlo inizialmente con acqua (per asportare eventuali tracce di glicerina), seccarlo di nuovo e poi, in soluzione eterea ed a debole calore, trattarlo con piccole quantità di calce spenta, secca (allo scopo di asportare le piccole quantità di acido). Dal filtrato, dopo evaporazione dell'etere, si ha il gliceride puro.

Se noi osserviamo il processo:

$$glicerina + acido\ grasso \rightleftharpoons gliceride + acqua,$$

appare evidente come l'azione del vuoto continuato si esplichi durante la nostra reazione col ridurre e mantenere costantemente piccolissimo il valore del termine acqua, a mano a mano che questa si produce disturbando l'equilibrio della reazione, spostandolo verso destra, con velocità di reazione gran-

dissima, specialmente in raffronto con quella ottenuta dagli sperimentatori citati.

Il nostro metodo di eterificazione si presenta con straordinaria semplicità, tantochè assume veramente l'aspetto di una esperienza di lezione, potendosi in un breve tempo osservare il graduale sviluppo, dalla massa reagente, di copiose nubi d'acqua condensantesi allo stato liquido in opportuni collettori.

Certamente questa eterificazione diretta eseguita nel vuoto, potrà estendersi a molti altri gliceridi, dei quali alcuni ancora non ottenuti per sintesi, e potrà servire anche, a parer nostro, per risolvere, in alcuni casi speciali, delle questioni di costituzione.

Ma l'interesse di questo nostro processo succintamente descritto, non si presenta solo dal punto di vista puramente scientifico quanto anche dal lato industriale, per quello che riguarda la sintesi della trioleina cui è connesso l'importante problema della deacidificazione degli olii.

Con questa Nota, di carattere preliminare, noi abbiamo inteso soltanto di stabilire il concetto fondamentale del nostro lavoro e di affermare per la prima volta la possibilità di ottenere una sintesi diretta dei gliceridi, rapida, con rendimento pressochè teorico, mercè l'impiego delle sole quantità stechiometriche di acido grasso e glicerina.

Ci ripromettiamo di comunicare tra breve dettagliatamente i numerosi lavori compiuti e quelli che tuttora si stanno eseguendo intorno a questo argomento.

Chimica. — *Sali doppi fra il fluoruro di piombo e gli altri sali alogenati dello stesso metallo.* Nota di Carlo Sandonnini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Agronomia. — *Le rocce e le acque dell'Agro Romano rispetto alla calce.* Nota di G. De Angelis d'Ossat, presentata dal Socio R. Pirotta.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Appunti mineralogici sulla miniera di Calabona (Alghero)*. Nota del dott. Aurelio Serra (1), presentata dal Socio G. Struever.

A S-SE di Alghero si trova la regione denominata Calabona, nella quale i sedimenti miocenici ricoprono le rocce trachitiche, che si rendono evidentissime al nord della Punta Argentera (108 m.). In questa regione, fin da tempi assai antichi furono praticate ricerche minerarie, ed anche negli ultimi tempi vi sono stati eseguiti dei lavori, poco fortunati per altro, perchè i minerali di zinco e di manganese furono rinvenuti così intimamente associati, da rendere infruttuoso ogni tentativo di separazione meccanica. I minerali di Calabona non sono stati finora, per quanto mi è noto, oggetto speciale di indagini scientifiche; reputo, perciò, opportuno, di riferire brevemente alcune osservazioni che io, dietro consiglio del prof. Zambonini, ho avuto agio di eseguire su un materiale abbastanza abbondante da lui raccolto insieme con me, e conservato nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

A Calabona la mineralizzazione si sviluppa principalmente nella parte media del calcare che costituisce il Monte Argentera: al tetto si può riconoscere una formazione piuttosto marnosa; al riposo, argilla e sottili strati steatitosi. I minerali dei quali si constatò l'esistenza sono: smithsonite, pirolusite, calcite, quarzo, pirite, calcedonio, diaspro, selce piromaca e argilla. Nelle righe che seguono esporrò brevemente le caratteristiche più importanti dei principali.

*Smithsonite*. — Questo minerale si presenta raramente in cristalli a facce curve confusamente intrecciati: il più spesso, invece, in incrostazioni botrioidali, che di solito tappezzano le pareti delle cavità che si aprono qua e là nei minerali di manganese. Il colore della smithsonite di Calabona è, generalmente, bianco, talvolta volgente un po' al ceruleo: alcune varietà, invece, sono gialle, ed altre verdi, e riescono, sotto questo aspetto, particolarmente interessanti. Come è noto, H. N. Stokes (2) ha osservato che la smithsonite di Marion Co., Arkansas, di colore giallo, deve la sua colorazione alla greenockite commista, e presenta, inoltre, una piccola parte dello zinco sostituita dal cadmio. Ho voluto, perciò, indagare se anche la smithsonite di Calabona contenesse cadmio o greenockite commista: ma le ricerche analitiche eseguite non mi hanno permesso di ottenere indizî sicuri della esistenza del cadmio;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) Cfr. E. Dana, *System of Mineralogy*, 6th Ed., pag. 279.

invece, ho potuto accertare la presenza del ferro e del manganese, con prevalenza del primo. A questi elementi, e particolarmente al ferro, mi sembra doversi ascrivere il colore giallastro della smithsonite studiata. La varietà verde di Calabona deve il suo colore al rame, del quale è facile riconoscere la presenza nel minerale.

Ho creduto non inutile eseguire un'analisi completa della varietà bianca, ed ho ottenuto i risultati seguenti:

| | |
|---|---|
| ZnO . . . . . | 63,13 |
| CaO . . . . . | 2,22 |
| $CO_2$ . . . . . | 34,65 |
| | 100,00 |

Si ha a che fare, perciò, con una smithsonite contenente una quantità abbastanza considerevole (3,96 %) di carbonato di calcio in miscela isomorfa; fatto, questo, non molto comune, perchè di solito nella smithsonite il calcio si rinviene soltanto in quantità molto piccole.

*Pirolusite.* — Questo minerale è abbondante a Calabona, e si presenta sia in masse terrose, evidentemente amorfe, che non presentano alcun interesse mineralogico, sia, invece, in masserelle nere, con splendore semimetallico assai vivace, a netta struttura cristallina. Questa pirolusite cristallina si compone di tante laminette riunite, come Köchlin ha osservato avvenire in certe varietà di Pitten, di Lölling, di Horhausen, di Siegen e di Hanne. Come è noto, la pirolusite è ritenuta generalmente come un prodotto amorfo di trasformazione di varî minerali di manganese, e questo modo di considerare la pirosulite trova un valido appoggio nel fatto che questo minerale si rinviene appunto, spesso, pseudomorfo di manganite, polianite, ecc. Non è, però, da tacersi che il Köchlin nei suoi importanti studii, oltre a cristalli, la forma dei quali è riferibile a quella della manganite, della polianite, della calcite e della dolomite, ne ha anche osservati altri non riferibili a minerali noti, e che potrebbero, quindi, rappresentare veri cristalli di pirolusite. A ciò deve aggiungersi che il Dana [1] ritiene che non possa escludersi la possibilità che la pirolusite rappresenti un minerale indipendente, con forma cristallina propria. Certo che la varietà cristallina di Calabona sembra proprio parlare in favore dell'esistenza di pirolusite cristallizzata; ma i risultati ottenuti nell'analisi del minerale di Calabona complicano la questione. Io, infatti, ho trovato la seguente oomposizione:

| | |
|---|---|
| MnO . . . . . | 73,20 |
| FeO . . . . . | 5,38 |
| O (per diff.) . . . | 19,19 |
| $H_2O$ . . . . . | 2,23 |
| | 100,00 |

[1] *System of Mineralogy*, 6th Ed., pag. 244.

Il materiale per l'analisi fu scelto con ogni cura, e particolare attenzione fu posta alla separazione della pirolusite dalla limonite che l'accompagna. Tutti i frammenti del materiale analizzato davano scalfittura nerastra, e non potevano, perciò, contenere limonite: anche nella polverizzazione non si ebbe alcun indizio che accennasse all'esistenza di limonite nelle lamelle di pirolusite. Riesce, perciò, particolarmente interessante la presenza di notevole quantità di ferro nel minerale di Calabona, se si pensa che il ferro, di solito, è, nelle pirolusiti pure, assai scarso, mentre si rinviene, invece, assai sovente, in quantità non molto diverse da quella su indicata, in non pochi psilomelani, dai quali il minerale studiato nettamente si distingue per la mancanza sia del bario, sia degli alcali, come pure per l'elevato tenore in ossigeno attivo. Non del tutto inverosimile appare l'ipotesi che il ferro costituisca il manganese, ipotesi confortata dal fatto che il rapporto $MnO + FeO : O$ attivo è uguale a 1,14; non sono, però, con questo fatto eliminate le difficoltà che si oppongono all'ipotesi di una miscela isomorfa di $MnO_2$ e di $FeO_2$ in base alle nostre attuali cognizioni sul ferro tetravalente.

Non privo di interesse è anche il tenore in acqua riscontrato nel minerale di Calabona, e che fu determinato con ogni cura. Le pirolusiti più pure finora analizzate, contengono sempre acqua in quantità oscillante più specialmente intorno al 2 %. È questo, sopra tutto, il caso per le analisi eseguite da Penfield (1) delle pirolusiti di Salisbury e di Negaunee nel Connecticut, analisi che, vuoi per la purezza del materiale impiegato, vuoi per il valore dell'analista, meritano particolare attenzione. Nelle sue tre analisi, Penfield ottenne 1,94, 2,33 e 2,68 %: dei valori, cioè, vicinissimi a quello da me trovato nella pirolusite di Calabona. L'acqua rinvenuta in quest'ultima, cristallina, non sembra possa considerarsi dovuta ad una pura e semplice alterazione: è molto più verosimile che si tratti di acqua disciolta. Non è probabile, — come potrebbe, a prima giunta, pensarsi, per la relativa costanza delle percentuali in molte delle migliori analisi, — che si abbia a che fare con acqua di costituzione, poichè il rapporto $(Mn, Fe) O_2 : H_2O$ sarebbe 9 : 1, del tutto inverosimile per un composto definito.

*Calcite.* — I cristalli di questo minerale, per lo più piccoli e raggruppati insieme, presentano la combinazione dello scalenoedro $\{20\bar{1}\}$ e del prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$: spesso si osservano anche piccole faccette romboedriche. Non rari sono i cristalli con *habitus* scalenoedrico, geminati secondo la base.

*Quarzo.* — I cristalli di quarzo, isolati o riuniti in associazione parallela, si rinvengono nelle geodi del calcare reso brunastro dal biossido di manganese. La combinazione è la solita: $\{2\bar{1}\bar{1}\}$ $\{100\}$ $\{22\bar{1}\}$. Il calcedonio e il diaspro non presentano nulla di notevole.

(1) In Dana, loc. cit.

*Pirite.* — Si presenta in piccoli cristalli cubici e pentagonododecaedrici, accompagnati da lamelle di ematite.

*Argilla.* — Si rinvenne generalmente impura per la presenza di sostanze eterogenee, come sabbia, carbonati terrosi, ossido di ferro, ecc.: ed in relazione con queste impurezze varia, naturalmente, anche il colore. Ho osservato anche una specie di argilla di colore cinereo, a struttura fogliacea, che si potrebbe chiamare un argilloscisto.

Circa la genesi della pirolusite, io ritengo che essa si sia formata per rimaneggiamenti dei materiali profondi, provenienti dalla trachite: questa, infatti, è fortemente mineralizzata nelle adiacenze della miniera, come pure molto distante da essa, a est e a nord della Punta Argentera. Per quel che riguarda gli altri minerali, io credo che la roccia trachitica, per influenza dell'acqua, dell'anidride carbonica e della temperatura, sia stata decomposta, con trasformazione dei silicati alcalini in carbonati, con separazione di silice, che diede luogo al quarzo, al calcedonio, al diaspro. Il silicato di alluminio rimase a costituire l'argilla, mentre i carbonati alcalini, solubili, furono facilmente asportati, ma determinarono, però, anche la formazione della smithsonite, che sarebbe da considerarsi, nel giacimento, come uno dei minerali più frequenti.

Fisiologia. — *Contributo alla fisiologia del Labirinto. L'ergogramma della rana slabirintata.* Nota del dott. M. Camis, presentata dal Corrispondente V. Aducco.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia. — *Un caso di Kala-Azar a Roma* [1]. Nota dei dott. Francesco Fulci [2] e Carlo Basile [3], presentata dal Socio Battista Grassi.

I recenti studî sulla diffusione delle Leishmaniosi suggerirono ad uno di noi, il Fulci, l'idea di studiare, a tal riguardo, quei casi di anemie che egli, in Roma, ha spesso occasione di osservare al tavolo anatomico, indotto a tale idea anche dal fatto che l'altro di noi, il Basile, aveva precedentemente [4] dimostrato l'esistenza, in questa città, della Leishmaniosi del cane.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma, diretto dal prof. B. Grassi.

[2] Assistente nell'Istituto Anatomo-patologico della R. Università di Roma, diretto dal prof. Ettore Marchiafava.

[3] Dell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

[4] Basile Carlo, Rendic. Accad. Lincei. Vol. XIX, serie 5ª, fasc. 3°, 1910.

Speciale attenzione ritenne il Fulci dovesse rivolgersi al caso di cui diamo breve nota, in quanto che dai sintomi clinici poteva sospettarsi il Kala-Azar. Comunicò la sua idea al Basile, il quale si unì a lui nello studio del caso:

N. Luigi, di anni 19, da Castelnuovo di Porto (Roma), carrettiere, celibe.

Nulla di notevole negli ascendenti e collaterali. Non bevitore, non fumatore, non venereo.

L'infermo è stato bene sino agli ultimi dell'agosto 1909, quando, trovandosi, per ragioni di lavoro, ad abitare fuori le porte di Roma, ricoverò in uno degli ospedali di questa città, avendo da alcuni giorni notato debolezza generale, pallore e progressivo dimagramento. Qui i sanitarî, avendo riscontrato anche elevazioni termiche, ritennero trattarsi di malaria e consigliarono una cura adatta.

L'infermo uscì dall'ospedale poco tempo dopo, e ritornò al lavoro; ma non più con le forze di prima, tanto che nell'inverno successivo ritornò al paese natìo e riparò in quel civico ospedale. Quivi i sanitarî gli riscontrarono una notevole anemia e, ancora una volta leggera febbre periodica, che, a dire dell'infermo, fu anche questa volta diagnosticata come malarica. Dopo 32 giorni di degenza l'infermo lasciò quello ospedale, sensibilmente migliorato; ma continuò a curarsi con iniezioni ricostituenti e riprese il lavoro.

Nei primi del settembre 1910 fu còlto da forte dolore alla gola e da febbre, che pare siano cessati dopo pochi giorni; però verso la fine di novembre ricomparve febbre alta, accompagnata da dolore all'emitorace destro, tosse ed escreato piuttosto scarso, poco aereato. I sintomi anemici di prima si sono rimanifestati, con grande debolezza generale. Continuando la febbre, ed avvertendo l'infermo, con la crescente astenia, una oppressione di respiro, sempre più accentuata, entrò al Policlinico Umberto I il 16 dicembre 1910.

*Esame obbiettivo.* — Costituzione scheletrica regolare; cute e mucose visibili di colorito pallido-giallastro; viso cereo; connettivo adiposo sottocutaneo quasi del tutto scomparso; muscolatura ipotonica ed ipotrofica; decubito obbligato supino; i laterali provocano molestia e difficoltà di respiro. Nelle regioni cervico-laterali, ascellari ed inguinali, glandule linfatiche di vario volume, da un chicco di grano ad un fagiuolo, indolenti, di consistenza duro-elastica. Gengive notevolmente pallide e facilmente sanguinanti in corrispondenza delle arcate dentarie; lingua un po' tremula, mobile in tutte le direzioni e ricoperta da crosticine ematiche. Notevole pulsazione delle carotidi e delle giugulari, che all'ascoltazione facevano sentire il suono accompagnato da un rumore di soffio, mentre il tono era normale.

*Torace.* — Nella metà destra, dalla spina della scapola in giù, suono ottuso con spostamento del limite superiore nei cambiamenti di posizione del paziente: silenzio respiratorio e fenomeno del Baccelli. Nulla di note-

vole nell'emitorace sinistro ed a carico del cuore. Polso ritmico frequente, discretamente ampio.

*Addome.* — Nulla di speciale nel sistema gastro-enterico.

Milza debordante un dito trasverso dall'arcata costale lungo la linea ascellare anteriore; dura, indolente.

Fegato debordante un dito trasverso dall'arcata costale, con margine tagliente, superficie liscia e consistenza non aumentata.

Le urine, all'ingresso al Policlinico, contenevano tracce di albumina ($^1/_4$ per mille), che poi scomparvero.

Minzione e defecazione normali.

Durante la degenza, l'esame dell'espettorato è stato sempre negativo per la tubercolosi.

L'esame del sangue, fatto il 24 dicembre, dava:

emoglobina 15 %;
eritrociti 1,000,000;
leucociti 6500;
rapporto globulare 1,154;
valore globulare 0,75.

Nei preparati colorati: micro- e macrociti, poichilociti, e rarissimi megaloblasti; dei leucociti, in prevalenza i polinucleati neutrofili.

Il 18 dicembre, una puntura esplorativa della pleura destra dava liquido siero-emorragico torbido. Prova di Rivalta positiva. Albumina 40 ‰. Allo esame citodiagnostico: copiosi eritrociti, moltissimi linfociti, qualche polinucleato neutrofilo, assenza di microrganismi.

Una seconda puntura esplorativa, praticata il 22 dicembre, diede esito negativo.

L'infermo andò sempre più deperendo; la temperatura presentava notevoli e costanti elevazioni, con frequenti remittenze e qualche rara intermittenza.

Nel pomeriggio del 16 gennaio 1911, il malato si aggravò, con sintomi di dispnea, collasso, mentre la temperatura si elevava a 39°. Nella notte successiva morì.

*Diagnosi clinica.* — Pleurite destra. Anemia perniciosa.

*Autopsia.* — Venne eseguita (Fulci) (1), dopo circa 24 ore dalla morte, nella sala Incisoria del Policlinico Umberto I:

Individuo di costituzione scheletrica regolare; cute di colorito giallo-terreo; tessuto adiposo quasi del tutto scomparso; masse muscolari ipotrofiche e flaccide; rigidità cadaverica persistente.

Nulla di notevole negli organi della cavità cranica e rachidea, all'infuori di un leggiero edema sottoaracnoidale.

(1) Il Fulci si riserva in una speciale pubblicazione lo studio minuto anatomico ed istologico dei varî organi e tessuti, che egli ha opportunamente fissati.

Timo permanente e leggermente ipertrofico. Cuore leggermente aumentato di volume e dilatato, con lieve degenerazione grassa del tessuto sottoendocardico.

Il polmone sinistro è uniformemente soffice ed aereato. Il polmone destro presenta sulla superficie pleurica, aderenze connettivali non molto antiche; nell'interno non mostra alterazioni rimarchevoli.

Lievissima endoaortite degenerativa diffusa.

La milza è aumentata di volume e specialmente di consistenza, con capsula poco ispessita, priva di aderenze, attraverso la quale traspare il colorito rosso-scuro della polpa splenica, interrotto da chiazze biancastre da infarti anemici. L'organo misura cm. 17 × 8 e pesa gr. 420. Sulla sezione, la milza è ricca di tessuto connettivale e i corpuscoli malpighiani non si distinguono bene; non si riconosce emosiderosi.

Il fegato ha forma conservata; la capsula si presenta perfettamente liscia, senza aderenze, di colorito piuttosto ocraceo. Peso gr. 1430. In sezione, si riconoscono in corrispondenza degli spazî triangolari e attorno alle venule centrali scarsi depositi emosiderinici.

La cistifellea è ripiena di bile tenue, colorata in giallo-verdastro.

I reni sono anemici e duri e non presentano alterazioni rimarchevoli.

Nello stomaco: pallore della mucosa, che non appare atrofica.

Nell'intestino tenue, mucosa pallida: nell'ultimo tratto del colon, gravi e diffuse ulcerazioni della mucosa.

Midollo delle ossa brevi e lunghe, di colorito rosso-scuro. Nel femore, il midollo è scarsissimo per neoformazione ossea nel canale midollare.

Negli altri organi non si riscontrano macroscopicamente alterazioni degne di speciale menzione.

In conclusione il reperto anatomico ricorda quello di un'anemia perniciosa criptogenetica, con lieve degenerazione grassa del miocardio; lievissima endoaortite degenerativa diffusa; pleurite fibrosa adesiva totale a destra; lieve emosiderosi del fegato; tumore duro di milza con infarti anemici; colite acuta ulcerosa; midollo osseo rosso, megaloblastico.

Per precisare, dopo tale reperto, la diagnosi etiologica sono stati allestiti (Basile) dei preparati per strisciamento della milza e del midollo delle ossa brevi e lunghe, i quali, fissati parte in alcool assoluto, parte in alcool ed etere, sono stati colorati col liquido di Giemsa.

Sono stati così messi in evidenza (Basile) i corpi di Leishman-Donovan, sia liberi, sia inclusi in leucociti prevalentemente mononucleati.

Il caso assume speciale importanza per questo reperto microscopico, che ne dimostra la vera natura.

Viene così pienamente avvalorato il sospetto avuto dal Fulci sull'etiologia del caso e realizzata l'ipotesi che il Basile aveva precedentemente (1) espressa che, cioè, casi di Kala-Azar dovessero esistere a Roma o nelle vicinanze.

Questa osservazione, importante dal punto di vista clinico ed anatomopatologico, conferma le osservazioni del Prof. Gabbi, il quale (2) ha trovato, in Sicilia e in Calabria, il Kala-Azar nell'adolescente e nell'adulto.

L'esistenza del Kala-Azar a Roma, da noi, per primi, segnalata, possa essere di interesse umanitario e scientifico.

Patologia. — *Contribuzioni alla patologia dei paesi meridionali. Febbre dei tre giorni o da pappataci in Sicilia e Calabria.* Nota del prof. U. Gabbi (1), presentata dal Socio B. Grassi.

Nella decorsa estate si osservò tanto a Messina, come sulla opposta riva del mare, in Calabria, una diffusa epidemia di una malattia che decorse con grande benignità e breve durata, caratterizzata da febbre insorgente d'improvviso, quasi senza, o con breve periodo prodromico, di solito molto elevata ed accompagnata da due gruppi di sintomi: l'uno, costante, rappresentato da intensa cefalea, da acuti dolori agli arti ed ai lombi, da spezzamento delle membra, da insonnia; l'altro, non costante, e costituito da anoressia acuta, da avversione ai cibi, da lingua impaniata con alito fetido, da irritazione di gola, da pena epigastrica con ventre chiuso, o, solo eccezionalmente, con diarrea.

Il quadro clinico apparve, salvo qualche eccezione, nella seguente maniera. In una famiglia si presentava prima colpito un membro, e successivamente, parecchi altri. Si constatarono anche 80 casi al giorno, all'incirca, nel mese di luglio.

I sintomi che dopo la febbre, che durava tre giorni, dominarono nella sindrome, furono la cefalea, e la profonda astenia durante e dopo la febbre stessa.

Di fenomeni che apparvero come eccezionali notammo una intensissima patofobia in una isterica, crampi dolorosi agli arti, nevralgie acutissime alle articolazioni dei ginocchi e dei piedi, ed in un caso, l'unico, una glomerulonefrite.

I primi casi osservati ebbero dai medici nomi diversi: influenza estiva, febbre gastro-reumatica, febbre da imbarazzo gastrico. A qualcuno fra essi,

(1) Basile Carlo, Rendic. Acc. Lincei, serie 5ª, sem. 2°, fasc. 10, 1910.

(2) U. Gabbi, *Studi intorno ad alcune malattie tropicali della Calabria e della Sicilia.* R. Istituto di Clinica Medica, fasc. 2°, Roma 1910.

al quale il quadro apparve insolito e forse nuovo, non bastò alcuno di quegli appellativi e pensò ad una *febbre delle macerie*! Ma quando ai primi di luglio potei vedere il primo caso in un signore che volle essere da me osservato e curato, e poi ne vidi in consulto a Messina altri esempî, riconobbi trattarsi della *febbre dei pappataci, o dei tre giorni* e ne detti avviso all'ufficiale sanitario. I medici di Messina e della Calabria ne osservarono e mi denunziarono moltissimi altri esempî.

L'epidemia cominciò alla fine di giugno e terminò nell'ottobre od ai primi di novembre. Un calcolo, ad occhio e croce, mi porterebbe a ritenere che più di 3000 casi si osservarono nella sola Messina.

La malattia colpì in eguale misura borghesi e militari. Essa si sviluppò in un anno nel quale le pioggie furono eccezionalmente frequenti a Messina ed in Calabria, e coincise con una strepitosa moltiplicazione di *culex* e di pappataci. Il lamento era generale. Dei pappataci io potei catturare non pochi esemplari.

***

Si è evidentemente trattato di quella febbre che alcuni medici militari italiani hanno qualificato di *febbre estiva*, e che, già veduta nell'India più di 18 anni or sono, ebbe, dopo le mirabili ricerche etiologiche di Franz, Dwer e Taussig, e quelle recentissime di Dirt il nome di *febbre da pappataci*, o *dei tre giorni*.

Questi osservatori dimostrarono:

1°) che infettando i pappataci con sangue di individui colpiti dalla *febbre dei tre giorni*, era possibile poi, facendo pungere individui sani dai medesimi, riprodurre in pieno il quadro della malattia;

2°) che l'infezione dei pappataci certamente avveniva solo quando questi succhiavano il sangue nel primo giorno di malattia;

3°) che i pappataci non erano infettanti subito dopo aver succhiato il sangue;

4°) che la infezione sperimentale avveniva dopo 4-7 giorni dalla avvenuta puntura;

5°) che il *virus* era filtrabile attraverso ad un filtro Chamberland-Pasteur;

6°) che il siero di sangue di individuo affètto da *febbre dei tre giorni*, inoculato in sano, provocava la malattia.

Queste ricerche vennero ampiamente confermate da Birt e, fra noi, da Napolitani e Tedeschi. Io tentai di riprodurre la malattia nelle scimmie, ma invano.

***

La malattia è quindi prodotta da un *virus* filtrabile (*invisibile virus*) che è inoculato dal *phlebotomus papataci*. Questo insetto, come hanno inse-

gnato le classiche ricerche del nostro Grassi, vive e si riproduce specie nei luoghi oscuri, reconditi, e nelle macerie.

Messina e la vicina Reggio offrivano, con le loro rovine, comodo rifugio ai pappataci; e questo spiega il numero enorme di essi osservato nella decorsa estate.

Quanto al modo come si sia sviluppata la epidemia, io non ho che una ipotesi da emettere. La malattia, come è noto, è endemica nella Dalmazia. Da questa è giunta nei *luoghi del terremoto*, coi navigli mercantili, una grande quantità di legname. È probabile che uno della ciurma, al quale, dopo i 4-7 giorni di incubazione, esplose la malattia all'arrivo a Messina, abbia infettato i primi pappataci, e da questi abbia avuto principio la epidemia, che prima colpì i borghesi e poi i militari.

Biologia. — *Ricerche sugli Ilesini dell'olivo* (1). Nota del dott. Mario Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

*Hylesinus oleiperda* Fabr.

Il ciclo biologico dell'*Hylesinus oleiperda* è molto più semplice di quello del fleotribo; ma, ciò nonostante, si avevano sui suoi costumi e sui danni che produce, notizie incerte ed inesatte. Le figure pubblicate delle gallerie dell'*oleiperda* sono molto lontane dal vero.

L'*H. oleiperda* è molto più dannoso del fleotribo; devesi alla scarsa prolificità, ai parassiti e ad altre cause nemiche che ne frenano la diffusione, se i danni da esso prodotti non sono ordinariamente ingentissimi.

L'*H. oleiperda* infatti svolge il suo ciclo biologico intieramente sulle piante vive: e se attacca di preferenza piante trascurate per la coltura, o già invase da altri parassiti, non risparmia affatto le piante di normale vegetazione.

Gli adulti dell'*H. oleiperda* cominciano ad apparire in fine di maggio; alla fine di giugno, ben pochi sono gl'insetti non ancora usciti dalle gallerie, dove si sono sviluppati.

I danni che l'*oleiperda* produce sulle piante, sono di due sorta: in primo luogo, delle erosioni, simili a quelle che il fleotribo compie alla ascella dei ramoscelli; poi, le gallerie di deposizione delle uova.

Le erosioni si trovano a preferenza su piante mal curate, deperite od invase da altri parassiti. L'insetto inizia quasi sempre la sua erosione in corrispondenza di una protuberanza foliare, o inferiormente all'ascella dei ramoscelli: mentre il fleotribo scava di solito il suo covaccio al vertice, di-

(1) Dal laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

remo così, dell'angolo acuto formato dalla inserzione di un ramoscello, l'*oleiperda* erode al vertice dell'angolo ottuso, che si forma inferiormente.

La forma di questa erosione è ovale, penetrante nell'alburno, lunga, in generale, 4-5 mm. L'insetto, che penetra nel legno per un foro circolare poco più grande del suo corpo, erode poi immediatamente al disotto della corteccia; l'erosione ne resta quindi in parte coperta da uno strato sottile, che in breve si essicca, e con facilità si rompe, lasciando scoperta interamente l'erosione. Le ascelle dei ramoscelli vengono spesso gravemente danneggiate, con detrimento del ramoscello, che intristisce o si spezza.

Le erosioni dell'*oleiperda* si distinguono con facilità dai covacci del fleotribo, oltre che per la loro posizione, anche per la larghezza, che è sempre maggiore.

Dopo aver passati diversi giorni sulle piante per potersi accoppiare, e per ricercare il luogo più adatto per deporre le uova, la femmina inizia la galleria, anche questa preferibilmente in una protuberanza foliare. Se le erosioni sopra descritte si trovano ordinariamente su piante trascurate e deperite, le gallerie di deposizione delle uova — pur trovandosi di preferenza su rami già per qualche causa indebolití (fumaggine, *cicloconium*, ecc.) — non risparmiano rami di vegetazione normale.

Le gallerie di deposizione delle uova sono per lo più escavate in ramoscelli non oltrepassanti 1-1,5 cm. di diametro, ma si trovano anche in rami più grossi, o nel tronco di piante in deperimento.

La galleria s'inizia con un foro circolare, procedendo secondo la direzione longitudinale del ramoscello; dopo pochi millimetri piega obliquamente a destra o a sinistra. Questo secondo tratto, che costituisce la vera galleria, si prolunga non più di un centimetro, più spesso meno; dalla parte opposta vi è spesso l'accenno brevissimo come ad un altro braccio della galleria: ma non è mai prolungato, nè vi abbiamo trovato uova deposte.

Complessivamente, dal foro esterno alla estremità, la galleria dell'*oleiperda non supera la lunghezza di un centimetro o un centimetro e mezzo.*

Come nelle erosioni, la galleria rimane coperta da un sottile strato di corteccia, che ben presto però si essicca e si lacera.

Le uova sono deposte in nicchie scavate su ambedue i lati della galleria, come il fleotribo; entro la galleria, all'epoca della deposizione delle uova, non si trova che la madre; appena deposte le uova, la madre abbandona la galleria.

Effettuandosi le escavazioni su piante vive, la pianta essuda ordinariamente, dai tessuti lacerati, della gomma che riempie spesso buona parte della galleria.

Il numero delle uova deposte è molto basso: il caso più frequente è che ne vengano deposte 10, cinque per lato; spesso un numero minore, di rado maggiore.

Le uova schiudono dopo una quindicina di giorni; ma raramente schiudono tutte quelle deposte: alcune sono distrutte dalla gomma, altre sono predate da insetti, che hanno facile accesso nella galleria, rimasta, per l'abbandono della madre, incustodita. Fin dalla deposizione delle uova, si ha dunque una prima riduzione del numero degli insetti che potrebbero nascere.

Le larve, appena nate, cominciano a scavare le loro gallerie. Queste sono irregolarissime fino dall'inizio: le larve, in principio, sembrano indugiarsi in vicinanza della galleria materna, donde a poco a poco si allontanano con frequentissimi cambiamenti di direzione, a brevissima distanza l'uno dall'altro; poi la galleria prende un andamento più deciso, con più lunghi tratti rettilinei; ma il percorso si mantiene irregolare sino alla fine, volgendo ora la larva ad angolo retto, ora tornando indietro di fianco e contiguamente al cammino già fatto, ora proseguendo in curve continue.

La causa di una tale irregolarità nel cammino delle larve deve evidentemente ricercarsi nel fatto che l'*Hylesinus oleiperda*, a differenza del *fleotribo* e, come vedremo, dell'*Hylesinus fraxini*, scava le sue gallerie nel legno vivo.

Quindi in principio la larva si tiene in vicinanza della galleria materna, dove l'escavazione di questa ha mortificato i tessuti circostanti; mano mano che la mortificazione si estende, le larve procedono nel loro cammino; ma l'affluenza dei succhi e la reazione della pianta, con l'essudamento della gomma, le obbligano spesso a cambiare direzione.

All'esterno, l'opera dell'*oleiperda* è tradita, oltrechè dal foro di apertura della galleria materna, da una macchia fosco-rossiccia, che si forma sulla corteccia.

Nelle gallerie stesse delle larve, la gomma essudata può essere causa della loro morte, se la produzione della gomma è copiosa e rapida; spesso invece la gomma invade alcuni tratti della galleria, mentre la larva, che ha già cambiato direzione, procede nel suo cammino.

Come il fleotribo, anche le larve dell'*oleiperda*, costantemente avanzando, lasciano dietro di sè la galleria interamente ostruita dalla rosura del legno e dagli escrementi.

Le larve vivono nel legno dal luglio al maggio-giugno successivo, continuando l'escavazione della galleria.

Via via che procede l'escavazione della galleria, il ramo intristisce; l'essiccamento, iniziatosi presso la galleria materna, si estende, se il ramoscello è sottile, fino a comprendere una porzione circolare intorno al ramoscello, che essicca così dalla parte lesionata fino alla cima.

Verso la metà della primavera la larva si scava una celletta ovale più profondamente nell'alburno; questa celletta è sempre più profonda di quella del fleotribo, e in direzione normale all'asse del ramoscello. In essa la larva si trasforma in preninfa ed in ninfa. Alla fine di maggio cominciano ad uscire gli adulti, forando la corteccia in corrispondenza della celletta ninfale.

Abbiamo già accennato che un certo numero di uova ordinariamente non arriva a schiudere e che un certo numero di larve è ucciso per la formazione della gomma. Una causa ancora più ingente di distruzione è l'azione degli imenotteri parassiti. Questi agiscono contro le larve dell'*oleiperda* nel modo già descritto parlando del fleotribo: perforano cioè la corteccia e depongono un uovo sulla larva sottostante; la larva che ne schiude, si sviluppa a spese di quella dell'*oleiperda*. Alcune specie di questi parassiti sono comuni con quelle parassite del fleotribo.

L'azione parassitaria di questi imenotteri si inizia già in agosto, quando le larve sono ancora nei primi stadî; altre larve vengono invece parassitizzate in primavera. Anche questi imenotteri escono perforando la corteccia, la quale può così presentare i fori del diametro di 1-1.5 mm. di uscita dell'*oleiperda*, e quelli di $^1/_3$-$^1/_2$ mm. di uscita dell'imenottero parassita.

In generale, esaminando delle gallerie dell'*oleiperda* in maggio-giugno, si trova che il numero delle larve che arrivano alla ninfosi non supera quasi mai la cifra di tre-quattro: non sono rare invece le gallerie da cui non esce nessun adulto, essendo tutte le larve perite per qualcuna delle cause suddette.

Sono appunto queste cause, di origine parassitaria o non, che mantengono ordinariamente i danni dell'*oleiperda* in proporzioni relativamente limitate.

### *Hylesinus fraxini* Fabr.

L'*Hylesinus fraxini* ha costumi di vita molto simili a quelli del fleotribo. Attacca il Frassino, l'Olivo e, sembra, anche l'Olmo, il Melo e l'Acacia.

Gli adulti, in primavera, abbandonano le *rose corticali*, che più avanti descriveremo, e vanno in cerca di tronchi o di grossi rami di olivo, abbattuti o tagliati. Mentre il fleotribo scava le sue gallerie nei rami di ogni grossezza, l'*Hylesinus fraxini* si trova soltanto sui grossi legnami. Le gallerie hanno la stessa forma di quelle del fleotribo, e da queste riconoscibili soltanto per il loro diametro. Un altro carattere che, dall'esterno, permette di distinguere le gallerie durante l'escavazione, è il seguente: dall'orificio della galleria del fleotribo — più piccolo — la rosura fuoriesce agglutinata, come un sottile cilindro attortigliantesi su sè stesso, ed è bianca, lievemente giallognola; dall'orificio della galleria dell'*H. fraxini* — più grande — la rosura esce a granuli più grossi, rossastra e non agglutinata: rimane presso l'apertura soltanto per la posizione del legno o le scabrosità della corteccia.

Come il fleotribo, l'*H. fraxini* depone le uova in nicchiette scavate sui lati della galleria; il numero delle uova deposte è ordinariamente superiore a quello del fleotribo: in media 60.

La deposizione delle uova continua per un tempo più lungo: in fine di maggio si possono ancora trovare delle uova. Le larve scavano le loro gal-

lerie possibilmente perpendicolari alla galleria materna. In questa si trovano i due insetti durante la deposizione delle uova; ma poi l'abbandonano, e nessuno dei due vi resta, contrariamente al costume del fleotribo.

I primi adulti si hanno in fine giugno; gli ultimi escono in fine agosto: i fori di uscita sono più grandi di quelli del fleotribo.

Abbandonato il legno, ove si sono sviluppati, vanno sulle piante vive. Le piante che attaccano sono quelle sofferenti per qualsiasi cagione (difetto di coltura, di concimazione, cause parassitarie): le piante isolate, quelle prossime alle strade e, in genere, specialmente le più esterne, ai lati di un oliveto.

Erodono sul tronco e sui grossi rami: su questi ultimi l'erosione s'inizia in corrispondenza di una protuberanza foliare. L'insetto erode immediatamente al disotto della corteccia, che ben presto si essicca e si lacera; se l'erosione è ampia, prende quasi l'aspetto di un rozzo merletto.

Benchè l'insetto vi rimanga dal luglio-agosto alla primavera seguente, la parte erosa è piccola; ma negli anni successivi, altri Ilesini vi sopravvengono, e le *rose corticali* — così sono chiamate dal Ratzeburg questi cunicoli che gli insetti si scavano per passarvi l'inverno — vanno a poco a poco ingrandendosi.

Per ciascuna *rosa* possono trovarsi diversi insetti.

Queste lesioni — prodotte di preferenza su piante già sofferenti — sono di per sè causa di grave deperimento.

Anche le larve dell'*H. fraxini* sono in parte distrutte da larve di imenotteri parassiti. Alcune specie di questi sono parassite tanto del fleotribo, quanto dell'*H. fraxini*.

Non indugiamo più oltre su ciò, riferendoci semplicemente a quanto abbiamo detto per il fleotribo e che dovremmo qui ripetere a proposito dell'*H. fraxini*.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente dell'Accademia senatore Blaserna presenta alla Classe il vol. I dell'Opera « Corpus Nummorum Italicorum » riguardante « Casa Savoia », offerto in dono da S. M. il Re. Mette in luce la straordinaria importanza dell'immane Opera, che occuperà circa venti volumi, e alla quale S. M. il Re consacra da lunghi anni tutta la sua energia di insigne numismatico. Soggiunge che presentò sensi di grazie al Sovrano, il quale già con questo Volume si è reso altamente benemerito degli studî storici.

Il Vicepresidente D'Ovidio, che presiede la seduta di Classe, aggiunge alcune parole di grato e riverente animo e di alto compiacimento, specialmente a nome della Categoria delle Scienze storiche.

E. M.

# ADUNANZA DELLE DUE CLASSI, DEL 5 FEBBRAIO 1911

P. Blaserna, Presidente

---

Nel dichiarare aperta la seduta plenaria, alla quale assistono in grandissimo numero gli accademici, il Presidente Blaserna ricorda che quando, nell'adunanza passata, venne presentata l'opera « Corpus nummorum italicorum » inviata in dono da S. M. il Re, si pensò ad una manifestazione di ammirazione dell'Accademia verso l'Augusto Autore, per questo grandioso lavoro d'alto valore scientifico. L'Ufficio di Presidenza si fece allora iniziatore della proposta di nominare S. M. il Re, Presidente d'onore dell'Accademia; e la proposta raccolse il plauso dei Soci, tra i quali inviarono la loro piena adesione, non potendo intervenire alla seduta, gli accademici:

D'Ovidio F., D'Ancona, Gabba, Pincherle, Briosi, Lorenzoni, Pizzetti, Naccari, Chiappelli, Fergola, Spezia, Bertini, Tizzoni, Bianchi, Borzì, Rajna, D'Ovidio E., Koerner, Celoria, Masci, Mattirolo, Taramelli, Maggi, Tocco, Lovatelli, Ciamician, Del Lungo, Vitelli, Loria.

Il Presidente sottopone perciò la proposta all'adunanza; e il Socio Finali osserva subito che la nomina di S. M. a Presidente d'onore, dovrebbe esser fatta per acclamazione. Alle parole del sen. Finali, tutti i Soci si levano in pieni, plaudendo.

La deliberazione dell'Accademia veniva immediatamente comunicata dal Presidente Blaserna a S. E. il Ministro della Real Casa, col seguente telegramma:

« Sua Eccellenza Nobile Mattioli Pasqualini Ministro della Real Casa,
Roma »

« Reale Accademia Lincei, su proposta dell'Ufficio Presidenza, nella seduta odierna ha acclamato Sua Maestà il Re suo Presidente d'Onore. Questo voto non concerne soltanto l'Augusto Sovrano, il quale rendendo perpetui i premi fondati dal compianto suo Genitore, ha tanto contribuito allo

sviluppo scientifico del nostro paese: esso esprime l'ammirazione dell'Accademia per l'illustre numismatico, che con lunga lena ha preparato una opera classica, destinata a colmare una grande lacuna in una scienza contemplata dagli Statuti accademici ».

« Prego V. E. di voler comunicare all'amato Sovrano il voto che proruppe dai nostri petti, e confido che S. M. vorrà gradire la leale manifestazione ».

Presidente Blaserna.